


SIGILLVM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV·ANG
VE RI TAS
CHRISTO ET ECCLESIAE

Silldorf





V. Puiseux's Untersuchungen

über die

algebraischen Functionen,

dargestellt

von

Hermann Fischer.

Mit 29 Holzschnitten.

Halle.

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1861.

Herrn

Bernhard Emil Bötticher,

Doctor der Medizin und praktischem Arzte,

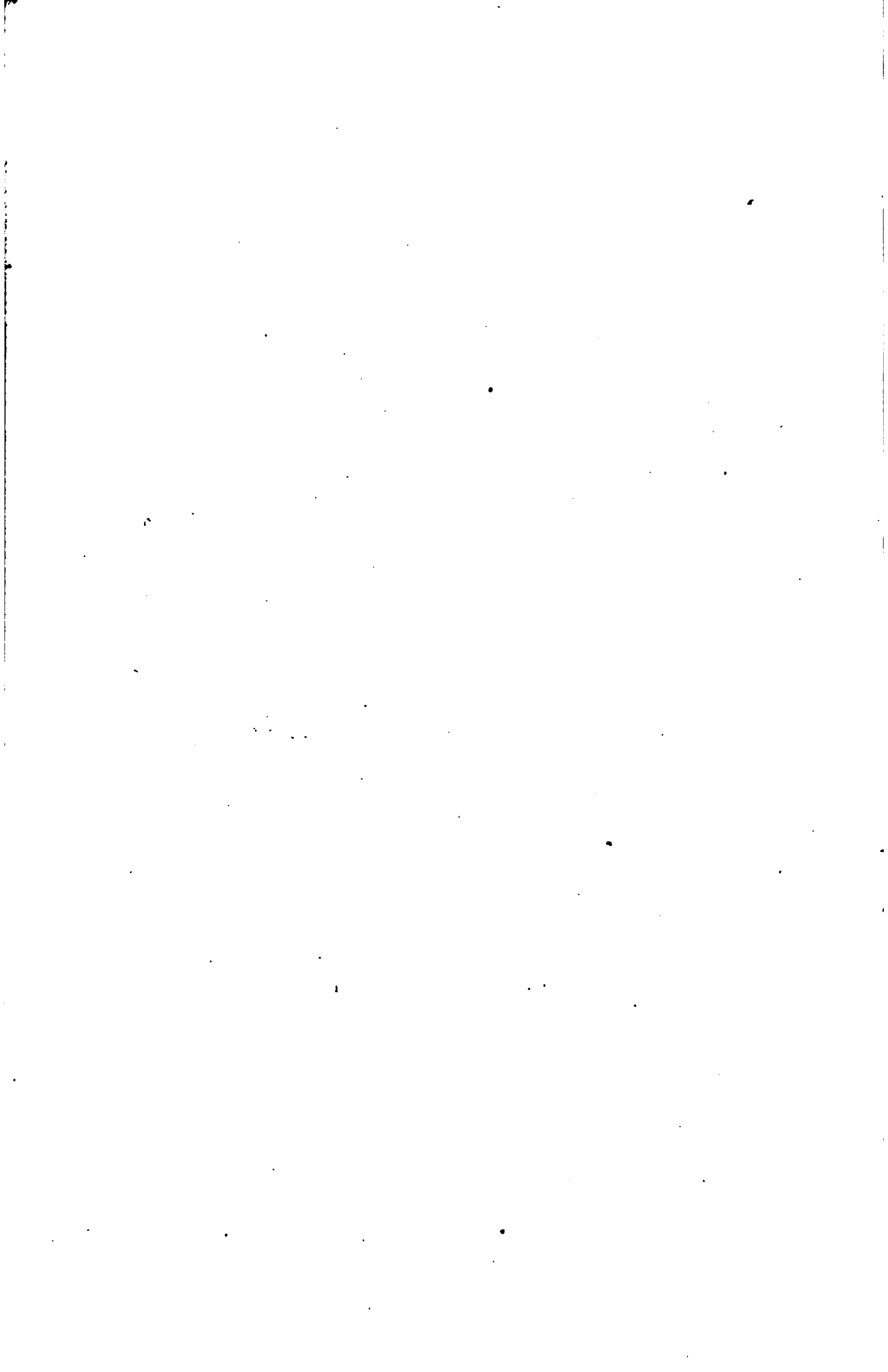
aus

innigster Freundschaft

gewidmet

von

Hermann Fischer.



Einleitung.

Die vorliegenden Untersuchungen, welche Herr Puiseux in Liouville's *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, T. XV und XVI in den Jahren 1850 und 1851 veröffentlicht hat, bilden für das Studium der höhern Zweige der reinen Mathematik, wie der mathematischen Physik eine vielumfassende Grundlage und sind insbesondere dadurch ausgezeichnet, dass überall von der so lichtvollen geometrischen Methode, deren Entstehung wir der durch Gauss*) eingeführten Darstellungsweise complexer Grössen verdanken, Gebrauch gemacht wird. Ich habe mich daher veranlasst gesehen, diese wichtigen und interessanten Untersuchungen den jüngern Freunden der mathematischen Analysis, welche auf dem ausgedehnten Gebiete derselben bereits zu den Elementen der Integralrechnung vorgeschritten sind, in deutscher Bearbeitung vorzulegen und darf vielleicht hoffen, dass dieses Schriftchen Manchem nicht unerwünscht sein wird.

Den gegenwärtigen Betrachtungen liegt der Begriff der Continuität der complexen Functionen zu Grunde (Nr. 1—7), wofür Cauchy sowol die allgemeine Definition**), als auch den thatsächlichen Beweis***) gegeben hat. Denkt man sich in der Ebene

---

*) *Göttinger Gelehrten Anzeigen* vom Jahre 1831, Stück 64.

**) *Comptes rendus*, année 1846; T. XXIII, p. 700.

***) *Exercices d'Analyse et de physique mathématique*; Paris 1840; T. II, p. 109.

einen Punkt P auf rechtwinklige Coordinaten-Axen bezogen, die Axe des Reellen und die des Imaginären. und nimmt in Bezug auf jene die Coordinate a, in Bezug auf diese die Coordinate b an, so wird dem Punkte P die complexe Grösse $a+bi$ zuertheilt. Auf diese Weise entspricht jedem Punkte der Ebene eine complexe Grösse, und umgekehrt lässt sich jede complexe Grösse als Punkt versinnlichen. Wie man mit den Punkten, welche complexen Zahlen entsprechen, die arithmetischen Operationen vornehmen kann, wie man also Punkte zu finden vermag, deren Werthe der Summe, Differenz, u. s. w. anderer durch gegebene Punkte dargestellter Werthe gleich sind; welche Curven *) durch gegebenen Functionen von z zugehörige Punkte beschrieben werden, sobald man den z entsprechenden Punkt Z auf bestimmten Curven fortführt; welche Punkte den Ableitungen gegebener Functionen zukommen u. s. f., hat Herr Siebeck ausführlich dargethan **). Denkt man sich nun die complexe Grösse z variabel, so kann der zugehörige Punkt Z jede Stelle der Ebene durchlaufen, so dass die Ebene als der geometrische Ort der complexen Grösse z anzusehen ist. Da man immer den Radiusvector r eines Punktes Z als Function eines Winkels t, welchen derselbe mit der x-Axe bildet, betrachten kann, so lässt sieh auch z als eine continuirliche Function $\varphi(t)$ von der reellen Grösse t auffassen, und zwar als eine complexe Function von der Beschaffenheit, dass $z=z_1$ für $t=t_1$ und $z=z_2$ für $t=t_2$ wird; alsdann wird $\varphi(t_1)$ einem Punkte Z_1 und $\varphi(t_2)$ einem Punkte Z_2 entsprechen, ferner während t von t_1 bis t_2 continuirlich wächst, die complexe Grösse $\varphi(t)$ oder z auf einer gewissen durch $\varphi(t)$ vollständig bestimmten Curve vom Punkte Z_1 zu dem Punkte Z_2 continuirlich übergehen. Auch der Function $u=f(z)$ wird ein Punkt U der Ebene entspre-

*) Unter *Curve* ist hier überhaupt der Weg zu verstehen, welchen ein Punkt durchläuft.

**) Crelle's *Journal für die Mathematik*, Bd. 55, S. 221.

chen, welcher mit Z seine Lage ändert und zwar in derjenigen Beziehung zu Z steht, die sich in der Function $f(z)$ selbst ausspricht; desgleichen wird $f(z_1)$ dem Punkte U_1 und $f(z_2)$ dem Punkte U_2 zugehören. Da die Function $\varphi(t)$ hier ganz willkürlich angenommen war, so kann man sich eben sowol eine andere Function $z=\chi(t)$ denken, für welche $\chi(t_1)=z_1$ und $\chi(t_2)=z_2$ ist, also, wenn wieder die Veränderung von z bloss durch die Veränderung der Grösse t bedingt ist, den Punkt Z während des Wachsens von t_1 bis t_2 auch auf einer andern Curve von Z_1 zu Z_2 übergehen lassen, und gleichzeitig wird dann U ebenfalls auf einer andern Curve als vorhin von U_1 nach U_2 gelangen. Somit gibt es einerseits unendlich viele Curven, auf denen Z durch Veränderung der Grösse z von Z_1 zu Z_2, und andererseits auch unendlich viele Curven, auf denen U von U_1 zu U_2 übergehen kann.

Der Begriff eines zwischen imaginären Grenzen genommenen Integrals und der Sinn der Vieldeutigkeit desselben ist zuerst von Cauchy*) dargelegt worden. Wie für den Fall, dass $u=f(z)$ und z nur reelle Werthe durchlaufen, das Integral

$$\int_a^b f(z)dz,$$

definirt wird durch die Summe:

$$f(a)dz + f(a+dz)dz + f(a+2dz)dz + \ldots + f(b-dz)dz + f(b)dz,$$

so soll hier ganz entsprechend das Integral

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz,$$

wenn die den Werthen $z_1, \zeta, \zeta_1, \zeta_2, \ldots z_2$ zugehörigen Punkte auf dem Wege von Z in sehr kleinen Abständen auf einander folgen, durch die Summe:

$$f(z_1)(\zeta-z_1) + f(\zeta)(\zeta_1-\zeta) + f(\zeta_1)(\zeta_2-\zeta_1) + \ldots + f(z_2)(z_2-\zeta_n)$$

definirt werden, wo $z_1, \zeta, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, z_2$ und $f(z_1), f(\zeta),$

---

*) *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires. Paris* 1825.

$f(\zeta_1), \ldots, f(z_2)$ complexe Functionen von der reellen Grösse t sind. Setzt man nun hierin:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + y_1 i, \\ \zeta &= \xi + \eta i, \\ \zeta_1 &= \xi_1 + \eta_1 i, \\ &\ldots\ldots \\ z_2 &= x_2 + y_2 i, \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 \cos t_1 = \varphi_1(t_1), & y_1 &= r_1 \sin t_1 = \varphi_2(t_1), \\ \xi &= \varrho \cos \tau = \varphi_1(\tau), & \eta &= \varrho \sin \tau = \varphi_2(\tau), \\ \xi_1 &= \varrho_1 \cos \tau_1 = \varphi_1(\tau_1), & \eta_1 &= \varrho_1 \sin \tau_1 = \varphi_2(\tau_1), \\ &\ldots\ldots \\ x_2 &= r_2 \cos t_2 = \varphi_1(t_2), & y_2 &= r_2 \sin t_2 = \varphi_2(t_2) \end{aligned}$$

reelle Functionen von t sind, während alsdann

$$\begin{aligned} f(z_1) &= f_1(t_1) + i f_2(t_1), \\ f(\zeta) &= f_1(\tau) + i f_2(\tau), \\ f(\zeta_1) &= f_1(\tau_1) + i f_2(\tau_1), \\ &\ldots\ldots \\ f(z_2) &= f_1(t_2) + i f_2(t_2) \end{aligned}$$

wird, wo f_1 und f_2 gleichfalls reelle Functionen von t bezeichnen, so ergibt die vorstehende Summe folgende Gleichung:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz =$$

$$\left\{[f_1(t_1)(\xi - x_1) + f_1(\tau)(\xi_1 - \xi) + \ldots] - [f_2(t_1)(\eta - y_1) + f_2(\tau)(\eta_1 - \eta) + \ldots]\right\}$$
$$+ i\left\{[f_1(t_1)(\eta - y_1) + f_1(\tau)(\eta_1 - \eta) + \ldots] + [f_2(t_1)(\xi - x_1) + f_2(\tau)(\xi_1 - \xi) + \ldots]\right\}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[f_1(t) \frac{d\varphi_1(t)}{dt} - f_2(t) \frac{d\varphi_2(t)}{dt} \right] dt$$

$$+ i \int_{t_1}^{t_2} \left[f_1(t) \frac{d\varphi_2(t)}{dt} + f_2(t) \frac{d\varphi_1(t)}{dt} \right] dt.$$

Somit ist das Integral von einer complexen Grösse mit Hilfe der

sinnlichen Darstellung des Imaginären eben so als complexe Grösse zweier reellen Integrale definirt, wie es die directe Ausführung des Ausdrucks

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[f_1(t) + if_2(t)\right]\left[\frac{d\varphi_1(t)}{dt} + i\frac{d\varphi_2(t)}{dt}\right]dt$$

mit sich bringt. Selbiges wird daher durch einen Punkt dargestellt, welcher durch successive Construction der Punkte, die der obigen Summe angehören, gewonnen werden kann.

Es ist aber zu untersuchen, ob man durch die Bildung dieser Summe für die Fortbewegung des Punktes Z von Z_1 nach Z_2 auf andern Curven denselben Punkt, oder neue Punkte erlangen wird, und wie im letztern Falle die neuen Punkte zu jenem liegen werden; d. h. ob der Ausdruck:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\mathfrak{f}_1(t)\frac{d\chi_1(t)}{dt} - \mathfrak{f}_2(t)\frac{d\chi_2(t)}{dt}\right]dt$$

$$+ i\int_{t_1}^{t_2}\left[\mathfrak{f}_1(t)\frac{d\chi_2(t)}{dt} + \mathfrak{f}_2(t)\frac{d\chi_1(t)}{dt}\right]dt,$$

wo

$$z = \chi(t) = \chi_1(t) + i\chi_2(t),$$
$$f(z) = \mathfrak{f}_1(t) + i\mathfrak{f}_2(t)$$

ist, immer denselben Werth hat, in welcher Weise man sich auch z von t abhängig denken mag, wofern nur $z = z_1$ für $t = t_1$ und $z = z_2$ für $t = t_2$ ist, oder ob dieser mehrere Werthe zulässt, und in welchem Zusammenhange dieselben unter einander stehen.

Wir werden uns gleich von der Gültigkeit des folgenden Satzes überzeugen:

Wenn $f(z)$ eine continuirliche Function von z bezeichnet, welche für keinen endlichen Werth von z unendlich wird, und wenn es eine stetige Function

$\psi(z)$ gibt, deren Ableitung $f(z)$ darstellt, so ist der Werth des Integrals $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$ von dem Wege der Integration unabhängig und stets gleich $\psi(z_2) - \psi(z_1)$.

Zunächst ist klar, dass wenn einem Werthe von z ein gewisser Punkt Z und der Function $\psi(z)$ der Punkt V entspricht, und dann Z zu irgend einem benachbarten Punkte Z_1 übergeht, dem die complexe Grösse $z+h$ zugehört, auch der Function $\psi(z+h)$ ein gewisser in der Nähe von V liegender Punkt V_1 zukommen wird. Bekanntermassen versteht man unter der Ableitung einer Function $\psi(z)$ einer complexen Grösse die Grenze des Ausdrucks $\frac{\psi(z+h) - \psi(z)}{h}$ für $h = 0$, jedoch nur unter der Voraussetzung, dass diese Grenze unabänderlich dieselbe ist, auf welche Weise auch h zu Null herabsinken mag. Nun ist aber die Lage des Punktes, welcher der Grösse $\frac{\psi(z+h) - \psi(z)}{h}$ entspricht, im Allgemeinen von der Richtung abhängig, in der Z zu Z_1 gelangen kann, mithin wird $\lim \frac{\psi(z+h) - \psi(z)}{h}$ im Allgemeinen unendlich viele Werthe annehmen und daher nicht als die Ableitung der Function $\psi(z)$ definirt werden können.

Gehen wir nun von der Annahme aus, dass

$$\lim_{h=0} \frac{\psi(z+h) - \psi(z)}{h} = f(z)$$

ist, und setzen wie früher $z = \varphi(t)$, $z+h = \varphi(t+\tau)$, $h = \varphi(t+\tau) - \varphi(t)$, wo $\varphi(t)$ eine complexe Function der reellen Grösse t ist, so geht durch Einführung dieser Werthe $\psi(z)$ in die complexe Function $\chi(t)$ über, ferner die zu Grunde gelegte Gleichung, wenn noch durch τ dividirt wird, in:

$$\frac{\chi(t+\tau) - \chi(t)}{\tau} = f(z) \, . \, \frac{\varphi(t+\tau) - \varphi(t)}{\tau}$$

oder

$$\frac{d\chi(t)}{dt} = f(z) \frac{d\varphi(t)}{dt} = f(z) \frac{dz}{dt},$$

wo also die complexe Grösse z als Function von t auftritt. Durch Integration nach t ergibt sich hieraus:

$$\int_{t_1}^{t_2} d\chi(t) = \chi(t_2) - \chi(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(z)\frac{dz}{dt}dt;$$

weil aber der Definition gemäss die Gleichungen

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z)\frac{dz}{dt}dt$$

und $\chi(t_2) = \psi(z_2)$, $\chi(t_1) = \psi(z_1)$ gelten, so folgt endlich, dass

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \psi(z_2) - \psi(z_1),$$

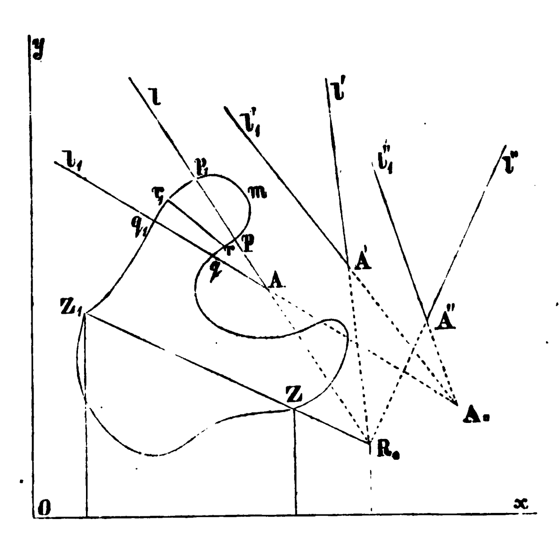
das Integral also von $\varphi(t)$ und mithin von dem Wege der Integration ganz unabhängig, somit unter den gemachten Voraussetzungen einwerthig ist.

Für ganze rationale Functionen von einer complexen Grösse hat der soeben abgeleitete Satz seine volle Gültigkeit; es leuchtet ferner ein, dass eine Function, welche durch eine convergente nach den Potenzen des Arguments z aufsteigende unendliche Reihe definirt ist, für alle Werthe von z, für die diese Reihe convergent bleibt, eine Ableitung besitzt, und dass umgekehrt auch eine Function $\psi(z)$ für sie existirt, als deren Ableitung die Reihe $f(z)$ gilt, so dass hier ebenfalls der Weg der Integration gleichgültig ist, so lange man sich auf Punkte eines gewissen Gebietes beschränkt, für welche die Reihe convergent ist. Das Resultat der Integration über eine geschlossene Curve muss in diesen Fällen $\psi(z_1) - \psi(z_1) = 0$ sein. Eben so erstreckt sich der Satz auf gebrochene rationale Functionen unter der Bedingung, dass $f(z)$ für keinen endlichen Werth von z unendlich wird. Sollte dieser Fall etwa für die Werthe a, a', a'', ... von z eintreten, so würde die Untersuchung des Integrals $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$ freilich eine Modification erleiden.

Es lässt sich die in Nr. 6 und 7 eingeführte Anschauung von der Art der Verschiebung einer beliebig gekrümmten Curve, welche daselbst gleichsam als ein biegsamer und ausdehnbarer Fa-

den betrachtet wird, in eine strengere Form bringen, deren sich Weierstrass in seinen Vorlesungen bedient. Es seien die Werthe $a, a', a'', \ldots.$ durch die Punkte $A, A', A'', \ldots.$ (Fig. A) dargestellt, ferner sei A_0 ein ausserhalb der Verbindungslinien AA', AA'',...., $A'A''$,.... angenommener Punkt mit dem Werthe a_0 und Z_1 ein

Fig. A.



beliebiger Punkt der Ebene, jedoch ausserhalb der geraden Linien Al, $A'l'$, $A''l''$,.... welche bezüglich von A, A', A'',.... aus ins Unendliche fortlaufen. Um das Integral $\int_{a_0}^{z_1} f(z)\,dz$ zunächst für die gerade Linie A_0Z_1 zu erhalten, nehmen wir auf A_0Z_1 einen Punkt Z an und setzen $\frac{A_0Z}{A_0Z_1} = s$, so dass dem Punkte Z die complexe Grösse $z = a_0 + (z_1 - a_0)s$ entspricht. Dadurch geht unser Integral über in:

$$\int_{a_0}^{z_1} f(z)dz = \int_1^0 (z_1 - a_0) f[a_0 + (z_1 - a_0)s]\,ds = F(z_1),$$

wo z_1 durch jeden Punkt der Ebene ausserhalb der Linien Al,

$A'l'$, $A''l''$,.... repräsentirt und daher durch z ersetzt werden kann. Somit ist:

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z} = \int_0^1 \Big\{ f[a_0 + (z-a_0)s] + (z-a_0)sf'[a_0 + (z-a_0)s] \Big\} ds,$$

wo die Ableitung

$$f'[a_0 + (z-a_0)s] = \frac{\partial f[a_0 + (z-a_0)s]}{\partial [a_0 + (z-a_0)s]}$$

einen ganz bestimmten Sinn hat, da f eine rationale Function vorstellt. Es ist aber

$$f[a_0 + (z-a_0)s] + (z-a_0)sf'[a_0 + (z-a_0)s] = \frac{\partial \{ sf[a_0 + (z-a_0)s] \}}{\partial s},$$

folglich hat man für alle Werthe von z ausserhalb der genannten Linien:

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z} = \int_0^1 \frac{\partial \{ sf[a_0 + (z-a_0)s] \}}{\partial s} ds = f(z),$$

d. h. es existirt eine Function $F(z)$, deren Ableitung nach z durch $f(z)$ dargestellt ist, und somit wird das Resultat der Integration über eine geschlossene Curve, welche sich bis zu keiner von jenen Linien erstreckt, gleich Null.

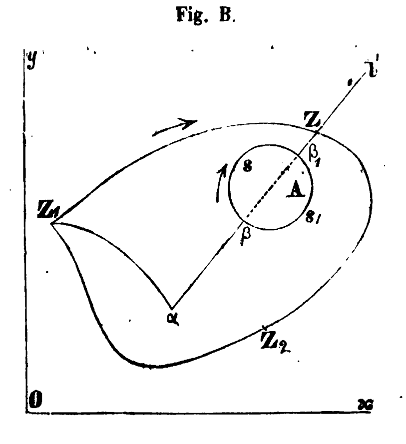
Zu denselben Folgerungen gelangt man natürlich auch, wenn man statt A_0 einen andern Punkt A_1 mit dem Werthe a_1 zu Grunde legt, und zwar für alle solche Punkte Z, die ausserhalb der neuen unbegrenzten Linien Al_1, $A'l'_1$, $A''l''_1$,.... liegen; nur hat die Function $F(z)$ alsdann eine andere Bedeutung, nämlich die, dass sie jetzt die Constante a_1 enthält, während sie vorhin die Constante a_0 enthielt. Dieselbe muss daher auch doppelt bezeichnet werden: etwa mit $F_{a_0}(z)$ und $F_{a_1}(z)$.

Hiernach ist also für jeden Punkt Z der Ebene, mit Ausschluss der auf den unbegrenzten Linien Al, Al_1,...., $A'l'$, $A'l'_1$,.... befindlichen Punkte, jede der Functionen $F_{a_0}(z)$, $F_{a_1}(z)$ so beschaffen, dass ihre Ableitung gleich $f(z)$ ist; für die Punkte der Linien Al, $A'l'$,.... besitzt die Function $F_{a_0}(z)$ allein diese Eigenschaft und für die Punkte der Linien Al_1, $A'l'$,.... nur die Function $F_{a_1}(z)$.

Integrirt man nun von Z_1 aus bis zu dem Punkte p_1 der Linie Al, dann über die Strecke p_1p und schliesslich auf derselben Seite von Al über pZ_2Z_1 zurück, so ist der Werth des geschlossenen Integrals gleich Null. Hierbei wird zwar die Linie Al_1 in q_1 und q überschritten, allein es ist für alle Punkte der Curve $Z_1q_1r_1rqZ_2Z_1$, wo die Strecke r_1r zwischen p_1p und q_1q nach A gerichtet ist, die Ableitung einer und derselben Function $F_{a_0}(z)$ gleich $f(z)$, daher das über diese Curve fortgeführte Integral gleich Null, eben so auch das Integral über $p_1prr_1p_1$, weil hierfür $F_{a_1}(z)$ die nämliche Eigenschaft besitzt: folglich hat man, da sich die Integration über r_1r und rr_1 gegenseitig aufheben, für das Integral über $Z_1p_1pZ_2Z_1$ den Werth Null.

Was endlich den Fall betrifft, dass Z die Linie Al in p_1 (Fig. B) überschreitet, so construire man um A einen kleinen Kreis und integrire über $Z_1p_1\beta_2s\beta_1A_0Z_1$ und auch über $Z_1A_0\beta_1s_1\beta_2p_1Z_2Z_1$, um jedes mal das Resultat Null zu erhalten; da sich die auf Z_1A_0 und A_0Z_1, über $A_0\beta_1$ und β_1A_0, über β_2p_1 und $p_1\beta_2$ bezüglichen Theile der Integrale zerstören, so ist auch die Summe der über $Z_1p_1Z_2Z_1$ und $\beta_2s\beta_1s_1\beta_2$ fortgeführten Integrale Null, d. h. das Integral über $Z_1p_1Z_2Z_1$ gleich dem Integrale über $\beta_2s_1\beta_1s\beta_2$. Beide geschlossene Curven werden also in gleichem Sinne durchlaufen.

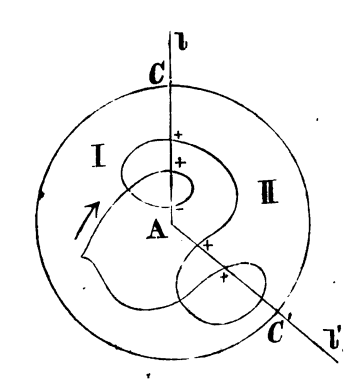
Fig. B.



Um für den Sinn einer geschlossenen Bewegung einen einfachen Ausdruck zu haben, ziehe man von dem Punkte A aus (Fig. C) zwei unbegrenzte gerade Linien, die von einer geschlossenen Curve in der Richtung des Pfeiles irgend eine Anzahl von Malen geschnitten werden, und beschreibe um A einen Kreis, wel-

cher die ganze geschlossene Curve umgibt. Ferner denke man sich in A einen Beobachter, welcher die Linie Al entlang sieht, bezeichne den Theil ACA_0CA des Kreises, dem der Punkt Z_1 angehört, mit I und den andern Theil mit II, nenne ferner die Richtung von links nach rechts die positive Richtung: alsdann wird die Integration auf dem Kreise im positiven Sinne vollzogen, so oft die Integrations-Curve die Linie Al in positiver Richtung durchschneidet, und umgekehrt.

Fig. C.



Nun lässt sich leicht angeben, wie viele Umläufe der Punkt Z auf einer geschlossenen Curve um einen Punkt A macht, wenn man die Anzahl der Schnittpunkte dieser Curve und der Linie Al ins Auge fasst. Offenbar muss die Curve aus dem Theile I in den Theil II des Kreises eben so oft eintreten, als es umgekehrt geschieht, wenn man die Theile durch die gebrochene Linie $C'AC$ geschieden denkt; es muss daher, wenn n positive und n' negative Schnittpunkte auf AC, ausserdem m positive und m' negative Schnittpunkte auf $C'A$ liegen,

$$n+m=n'+m'$$

sein, d. h. $n-n'=m'-m$. Da aber $m'-m$ für die Integration über $C'A$ gleich $m-m'$ für die Integration über AC' ist, so hat die Zahl $n-n'$ unabhängig von der Richtung der von A aus gezogenen Linie stets einen constanten Werth, welcher als Mass für die Anzahl der Umläufe dienen kann. Auch für jede von A ausgehende gebrochene oder continuirlich gekrümmte Linie hat Dasselbe Gültigkeit; ferner ist klar, dass jene Anzahl gleich ± 1 oder 0 ist, wenn die zu durchlaufende geschlossene Curve keine Dop-

polpunkte hat, je nachdem der Punkt A innerhalb oder ausserhalb dieser Curve liegt. —

Alle vorstehenden Betrachtungen erstrecken sich auch auf solche transcendente Functionen $f(z)$, welche folgenden Bedingungen unterworfen sind:

1) dass $f(z)$ für alle reellen und imaginären Werthe von z eindeutig ist;

2) dass es innerhalb eines endlichen Gebietes nur eine endliche Anzahl solcher Werthe von z gibt, für welche die Function $f(z)$ unendlich wird (*singuläre Punkte*), und dass diese übrigens mit z continuirlich bleibt.

3) dass auch die erste Ableitung von $f(z)$ diesen Bedingungen entspricht und überall mit $f(z)$ selbst continuirlich ist.

Die in den Nummern 9—12 enthaltenen Sätze, welche hier nur als Zusätze erscheinen, sind zwar schon von Cauchy aufgestellt worden*); wenn man jedoch mit Hilfe des in Nr. 6, 7 und im zweiten Theile Gesagten sich davon Rechenschaft zu geben weiss, wann die über eine geschlossene Curve hin zu integrirende Function nach einem Umlauf des beweglichen Punktes ihren Anfangswerth wieder annimmt, und wann nicht, lassen diese Sätze erst eine einfachere Deutung zu. Hieraus wird sodann in Nr. 14 die Reihen-Entwickelung einer Function $u = \varphi(z)$ mit Hilfe einer Methode abgeleitet, welche ebenfalls von Cauchy herrührt und mehrfach wieder benutzt worden ist.

Es bedarf dann noch des Nachweises, dass eine solche Entwickelung von $\varphi(z)$ nur auf eine Weise möglich ist, so dass bei jeder Entwickelung die Coefficienten von $(z-c)^m$ unverändert auftreten. Bezeichnet man nämlich das Integral $\int' \frac{\varphi(z)}{z-\gamma} dz$ für den

*) In dem angeführten *Mémoire* und den *Comptes rendus*, T. XXIII, p. 253 und 692.

kleinen Kreis um Γ mit (ε), für den Kreis σ mit (ϱ) und für einen um C beschriebenen Kreis mit (μ), so ist offenbar

$$(\varrho) = (\varepsilon) + (\mu) = 2\pi i\varphi(\gamma) + (\mu),$$

daher

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}[(\varrho) - (\mu)],$$

wo

$$(\varrho) = 2\pi i \sum_{m=0}^{m=\infty} A_m(\gamma - c)^m, \quad A_m = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho)} \frac{\varphi(z)}{(z-c)^{m+1}}dz,$$

$$(\mu) = 2\pi i \sum_{m=0}^{m=\infty} B_m \frac{1}{(\gamma - c)^{m+1}}, \quad B_m = -\frac{1}{2\pi i}\int_{(\mu)} (z-c)^m \varphi(z)\,dz$$
$$= -A_{-(m+1)}$$

ist; mithin hat man:

$$\varphi(\gamma) = \sum_{m=0}^{m=\infty} A_m(\gamma - c)^m + \sum_{m=0}^{m=\infty} B_m \frac{1}{(\gamma - c)^{m+1}}$$

und für alle innerhalb des Kreises σ befindlichen Werthe von z:

$$\varphi(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_m(z-c)^m.$$

Multiplicirt man diese Reihe mit $\frac{1}{(z-c)^n}$, integrirt hierauf über einen Kreis σ, für dessen Gebiet die Reihe convergent bleibt, und beachtet zugleich, dass das Integral

$$\int_{(\varrho)} \frac{\varphi(z)}{(z-c)^n}dz = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{(\varrho)} A_m(z-c)^{n-m}dz$$

für alle von $n-1$ verschiedene Werthe m Null ist, wie sich durch Einführung von $z - c = re^{ti}$ ergibt; so hat man:

$$\int_{(\varrho)} \frac{\varphi(z)}{(z-c)^n}dz = \int_{(\varrho)} A_{n-1}\frac{dz}{z-c} = 2\pi i A_{n-1},$$

folglich

$$A_{n-1} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)}{(z-c)^n}dz$$

oder

$$A_m = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)}{(z-c)^{m+1}}dz,$$

wo m alle positiven und negativen Zahlen durchläuft. Somit lässt sich $\varphi(z)$ nur auf eine Weise nach den Potenzen von $z-c$ entwickeln.

Sobald die von Cauchy entlehnten Sätze bewiesen sind, ist es von Nutzen eine specielle Anwendung derselben auf eine algebraische Gleichung zu machen (Nr. 17), weil sich dann die Bedingungen ihrer Gültigkeit bestimmter einkleiden lassen.

Im zweiten Theile (Nr. 18—27) werden zunächst Untersuchungen über die Art der Vertauschungen angestellt, welche die einer algebraischen Gleichung genügenden Functionen u_1, u_2,.... eingehen, sobald man den beweglichen Punkt um singuläre Punkte herumführt, und hiermit mehrere neue Sätze abgeleitet; Puiseux's Methode gewährt ein Mittel, die Darstellung der Systeme wirklich zu leisten. Zugleich wird hier gezeigt, wie man überhaupt jeden von einem Punkte zu durchlaufenden begrenzten Weg auf eine Zusammensetzung einer einfachen Curve und einer Reihe von Elementar-Curven reduciren und die Werthe, welche die Function auf verschiedenen Wegen erlangt, unmittelbar beurtheilen kann, wenn man sich der so vortheilhaft gewählten Bezeichnungen bedient.

Der dritte Theil enthält die Anwendungen dieser Untersuchungen auf die Integralrechnung und insbesondere die Behandlung von Functionen, welche durch Gleichungen zweiten Grades und durch binomische Gleichungen definirt sind. Es ergeben sich hier (Nr. 50 und 59) allgemeine Formeln für sämmtliche Werthe eines zwischen bestimmten Grenzen genommenen Integrals, sobald es nämlich elliptisch oder hyperelliptisch ist, $2n$ Perioden desselben, wenn das unter dem Wurzelzeichen stehende Polynom vom $(2n+1)$ten oder vom $(2n+2)$ten Grade ist; und sobald es einer binomischen Gleichung $m$ten Grades angehört, welche n singuläre Punkte darbietet, $m-1$ Perioden, falls n einem Vielfachen von m gleich ist; $(m-1)(n-2)$ Perioden, wenn ausserdem der Grad des Polynoms von z kleiner als $\frac{n}{m}-1$ ist, und in andern Fällen $(m-1)(n-1)$ Perioden.

In Nr. 58 hat Puiseux die Jacobi'sche Behandlungsweise der Abel'schen Functionen durch seine Methode auf den Fall erweitert, wenn mehr als zwei Functionen zugleich gegeben sind.

Zum Schlusse folgt eine zweite Abhandlung über die irreductibeln Gleichungen, die für alle vorangehenden Untersuchungen eine besondere Wichtigkeit haben.

Fischer.

Erste Abhandlung.

Erster Theil.

---

1. Eine Function u einer reellen oder imaginären Variabeln z, welche durch eine algebraische Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

definirt ist, wird dadurch, dass man der Variabeln einen besondern Werth ertheilt, noch nicht vollständig bestimmt, weil die gegebene Gleichung im Allgemeinen für jeden Werth von z mehrere Werthe von u liefert; es muss noch angegeben werden, welcher von diesen Werthen zur unzweideutigen Definition der Function u dienen soll.

So würden sich z. B. aus der Gleichung

$$u^2 - z = 0$$

für einen durch re^{ti} dargestellten Werth von z, wo r positiv und t reell ist, folgende zwei entsprechende Werthe von u ergeben:

$$r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{t}{2}i}, \quad -r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{t}{2}i},$$

wo $r^{\frac{1}{2}}$ den Zahlenwerth der Quadratwurzel von r bedeutet. Zur Vervollständigung der Definition unserer Function könnte dann für t ein Winkel zwischen $-\pi$ und $+\pi$, und für u der eine jener beiden Werthe, etwa $r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{t}{2}i}$ ein- für allemal gewählt werden; mit dieser Wahl jedoch, welche zumal nicht allgemein bei Gleichungen von jedem Grade stattfinden kann, ist das Unbequeme verknüpft, dass hierdurch u zu einer discontinuirlichen Function

von z gemacht wird. Legt man nämlich der Variabeln die beiden Werthe $re^{(\pi-\varepsilon)i}$ und $re^{(-\pi+\varepsilon)i}$ bei, die für einen positiven, unendlich kleinen Werth von ε unendlich wenig von einander abweichen, so werden die correspondirenden Werthe von u:

$$r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\pi-\varepsilon}{2}i}, \quad r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{-\pi+\varepsilon}{2}i}$$

um eine endliche, mit $2r^{\frac{1}{2}}i$ zusammenfallende Grösse differiren.

2. Diese Discontinuität lässt sich aber durch eine andere Definition der Function u verhüten.

Gehen wir wieder von der Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

aus, deren linke Seite wir als eine ganze Function von u und z betrachten können, legen z einen beliebigen Anfangswerth c bei, so dass der Anfangswerth b von u jede Wurzel der Gleichung

$$f(u, c) = 0$$

sein kann, und lassen nun z von dem Werthe c aus zu einem neuen Werthe k continuirlich übergehen, so werden sich zu gleicher Zeit auch, wie Cauchy in seinen *Nouveaux Exercices de Mathématiques, tome II, page* 109 bewiesen hat, die verschiedenen Werthe von u continuirlich ändern, unter denen einer nämlich zu Anfang gleich b ist und nach Durchschreitung unendlich kleiner Zwischenstufen einen bestimmten Werth h erreicht, welcher $z = k$ entspricht. Gilt nun auch dieser Werth von u als eine Function von z, und zwar offenbar als eine stetige, so hängt doch die Bestimmung desselben für einen besondern Werth von z nicht allein von diesem selbst, sondern zugleich auch von der Werthreihe ab, welche z von seinem Anfangswerthe aus durchlaufen ist.

Es ist hier wol zu beachten, dass die Function unbestimmt wird, wenn z beim Fortgange von c bis k auch einen solchen Werth erhält, für welchen zwei Wurzeln der Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

coincidiren; da jedoch Werthe dieser Art nur in begrenzter Zahl vorhanden sind, so kann dieser Umstand immer umgangen werden,

welche Werthe auch die Grössen c und k besitzen mögen, weil der Uebergang einer imaginären Variabeln von einem Werthe zu einem andern auf unzählige Arten möglich ist. Wir bemerken ferner, dass die Function u für $z = k$ diesen oder jenen Werth annehmen kann, je nachdem man z diese oder jene Werthreihe durchlaufen lässt.

Soll also die vorliegende Aufgabe, für einen beliebigen Werth von z den Werth von u zu bestimmen, nur eine Lösung zulassen, so muss dieselbe folgendermassen gestellt werden:

„Wenn die Function u, welche der Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

genügt, für $z = c$ den Werth b besitzt, so soll angegeben werden, welchen Werth dieselbe für $z = k$ erhält, sobald z von c bis k eine vollständig bekannte Werthreihe stetig durchläuft."

Wenn es nach Cauchy's Untersuchungen für die Analysis und insbesondere für die Integralrechnung von hoher Wichtigkeit ist, die Mannigfaltigkeit der Uebergänge imaginärer Variabeln von einem Werthe zu einem andern in Betracht zu ziehen, so werden wir uns, um den Gang einer solchen Variabeln deutlich vor Augen zu haben, der geometrischen Darstellung bedienen, welche dem grossen Mathematiker so ausserordentliche Vortheile gewährt hat. Sobald wir $z = x + yi$ setzen, haben wir uns einen Punkt Z vorzustellen, dessen rechtwinklige Coordinaten x und y sind, so dass jedem Werthe von z ein Ort von Z entspricht, und umgekehrt; während also z von c bis k eine bestimmte Werthreihe durchläuft, geht der bewegliche Punkt Z von dem $z = c$ entsprechenden Punkte C bis zu dem $z = k$ entsprechenden Punkte K auf einer bestimmten Curve fort. Demnach wird unser Problem auch lauten: Den Werth zu finden, welchen die Function u erhält, wenn Z von C bis K eine vorgeschriebene Curve durchläuft, welche sowol eine gerade, als gebrochene, als krumme Linie, als auch irgend eine Zusammensetzung von geraden und krummen Linien sein

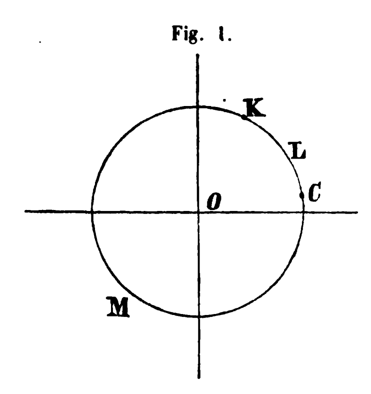
kann, wofern nur zwischen den Punkten C und K keine Unterbrechung der Stetigkeit stattfindet.

3. Um diese allgemeinen Betrachtungen in helleres Licht zu setzen, wollen wir dieselben an die obige Gleichung

$$u^2 - z = 0$$

knüpfen. Beschreiben wir um den Anfangspunkt O mit beliebigem Radius r einen Kreis, nehmen auf dessen Umfang innerhalb des Winkels der positiven Axen die beiden Punkte C und K an, nennen τ und ϑ die spitzen Winkel COx und KOx (Fig. 1.) und setzen $\vartheta > \tau$ voraus:

Fig. 1.



so ist für den Punkt C:

$$z = re^{\tau i} = c$$

und für den Punkt K:

$$z = re^{\vartheta i} = k,$$

während für einen beliebigen Ort des Punktes Z auf der Peripherie

$$z = re^{ti}$$

ist; hierbei kann der Winkel τ zum Anfangswerthe von t und die Grösse $r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\tau}{2}i}$ zum Anfangswerthe von u genommen werden. Wenn wir nun Z von C nach K auf dem Bogen CLK fortführen, der kleiner als der halbe Umfang ist, also den Winkel t von τ bis ϑ continuirlich ausdehnen, so erhält die Function u für $z = k$ den Werth $r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\vartheta}{2}i}$; lassen wir hingegen Z den Bogen CMK durchlaufen, der grösser als der halbe Umfang ist, d. h. den Winkel t von τ bis $\vartheta - 2\pi$ abnehmen, so erhält die Function u für $z = k$ den Werth $r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\vartheta - 2\pi}{2}i}$, welcher jenem gleich, aber entgegengesetzt ist. Hieraus sehen wir schon, dass eine implicite Function nach unserer Betrachtungsweise nicht allein von dem Werthe der Variabeln z, d. h. von der Lage des Punktes Z, sondern auch von dem Wege abhängt, welchen dieser Punkt von seinem anfänglichen Orte aus zurückgelegt hat.

4. Im Allgemeinen ist die linke Seite $f(u,z)$ der gegebenen Gleichung von der Form

$$Au^m + Bu^{m-1} + Cu^{m-2} + \ldots + Iu + K,$$

wo $A, B, C, \ldots I, K$ ganze Functionen von z bezeichnen, welche wir ohne gemeinschaftlichen Theiler voraussetzen können. Ueberdies darf diese Gleichung als eine irreductible betrachtet, d. h. der Function $f(u,z)$ der Charakter der Theilbarkeit durch irgend eine ganze Function von u und z, deren Grad in Bezug auf u kleiner als m ist, abgesprochen werden; denn wäre ein solcher Theiler vorhanden, so würde die gegebene Gleichung in mehrere andere irreductible Gleichungen zerfallen, von denen jede durch die in Rede stehende Function u erfüllt wird. Unter dieser Voraussetzung können für kein z zwei Wurzeln der Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

zusammenfallen, weil diese sonst bekanntermassen nicht irreductibel sein würde; übrigens werden diejenigen Werthe von z, für welche sie gleiche Wurzeln besitzen sollte, durch eine Gleichung in z bestimmt, die auf eine begrenzte Anzahl von Auflösungen führt, so dass die ihnen entsprechenden Punkte sich in begrenzter Zahl vorfinden, ohne eine stetige Curve zu bilden.

5. Um die zu betrachtende Function genau zu definiren, lassen wir Z von einem Punkte C ausgehen, welcher dem Werthe c von z entspricht, nehmen ferner an, dass die Gleichung

$$f(u,c) = 0$$

eine oder mehrere einfache, endliche Wurzeln besitzt, von denen eine mit b_1 bezeichnet werden mag, während u_1 eine stetige Function von z vorstellt, welche der Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

genügt und sich gerade beim Ausgange des Punktes Z von C auf b_1 reducirt.

Denken wir uns nun Z von dem $z = c$ entsprechenden Punkte C aus nach dem $z = k$ entsprechenden Punkte K auf einer Curve

fortgehen, auf welcher die Function u_1 nirgends unendlich wird, oder mit einer zweiten Wurzel der Gleichung

$$f(u,c)=0$$

coincidirt, und dass schliesslich u_1 im Punkte K einen Werth h_1 annimmt, welcher alsdann eine der Wurzeln der Gleichung

$$f(u,k)=0$$

sein wird; so gelangen wir durch die folgenden Betrachtungen zu einem Fundamentalsatze unserer Theorie: dass dieser Werth h_1 ungeändert bleibt, sobald die Curve CMK zwischen den festen Punkten C und K in die unendlich nahe liegende Curve $CM'K$ übergeht (Fig. 2.).

Fig. 2.

Stellen wir uns nämlich vor, zwei bewegliche Punkte Z und Z' durchliefen diese beiden Curven zu gleicher Zeit, von dem Orte C gleichzeitig ausgehend und in K gleichzeitig zusammentreffend, während die simultanen Orte M und M', wo die Function u_1 die simultanen, continuirlich veränderlichen Werthe v_1 und v_1' besitzen mag, stets einander unendlich nahe bleiben: so wird die Veränderung der Differenz $v_1 - v_1'$ ebenfalls continuirlich erfolgen.

Beachten wir nun, dass die Wurzel u_1 der Gleichung

$$f(u,z)=0$$

die ganze Curve CMK entlang keiner andern Wurzel gleich ist und sich daher eine endliche Grösse $\varDelta$ der Art angeben lässt, dass die Norm der Differenz zwischen u_1 und einer zweiten Wurzel entlang dieser Curve beständig grösser als $\varDelta$ ist; da ferner die Werthe von z für die Punkte M und M' unendlich wenig differiren und folglich jede der Wurzeln der Gleichung

$$f(u,z)=0$$

für den Punkt M' von einer der Wurzeln der nämlichen Gleichung für den Punkt M unendlich wenig differirt: so ergibt sich, dass die Norm der Differenz $v_1 - v_1'$ entweder unendlich klein, oder

grösser als Δ ist. Weil nun diese Differenz im Punkte C gleich Null und ausserdem continuirlich veränderlich ist, so muss sie fortwährend unendlich klein, folglich im Punkte K in aller Strenge gleich Null sein; die Function u_1 erhält demnach in K denselben Werth h_1, mag nun Z den Weg CMK, oder den Weg $CM'K$ zurückgelegt haben.

6. Wenn wir uns jetzt eine allmälige Verschiebung der Curve CMK, als absolut biegsamen und dehnbaren Faden gedacht, zwischen den festen Punkten C und K vorstellen, so bietet sich unmittelbar folgender Satz dar:

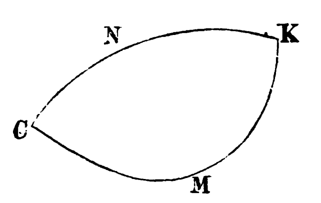
Sobald der Punkt Z von C nach K gelangt, mag nun der Weg CMK, oder der Weg CNK (Fig. 3) durchlaufen sein, erhält die Function u_1, die in C den Werth b_1 besass, jedesmal denselben Werth h_1, wenn sich nur die Curve CMK durch Verschiebung mit CNK zur Coincidenz bringen lässt, ohne dass dabei einer derjenigen Punkte überschritten wird, für welche die Funtion u_1 unendlich wird, oder mit einer zweiten Wurzel der Gleichung

$$f(u,z)=0$$

zusammenfällt.

7. Da wir den Punkt K mit C zusammenfallen lassen können, so gelangen wir noch zu folgendem Satze:

Fig. 3.



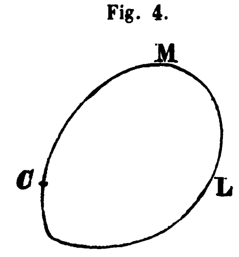
Wenn der Punkt Z von C aus die Curve $CLMC$ bis zu demselben Punkte C zurück beschreibt (Fig. 4), so erhält die Function u_1, die anfänglich den Werth b_1 hatte, zuletzt wieder denselben Werth b_1, wofern sich nur die geschlossene Curve $CLMC$ auf den blossen Punkt C reduciren

lässt, ohne dass einer derjenigen Punkte überschritten wird, für welche u_1 unendlich wird, oder mit einer zweiten Wurzel der Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

zusammenfällt.

Fig. 4.



Es ist sehr zu beachten, dass diese geschlossene Curve *CLMC* durchaus jede Gestalt annehmen, sich sogar schneiden, oder um den Punkt C beliebig viele Umläufe machen kann, wenn nur die in dem Satze ausgesprochene Bedingung erfüllt wird.

So z. B. nimmt die Function u_1, welche durch die Gleichung

$$u^m = z - a$$

definirt ist, ihren Anfangswerth wieder an, sobald der Punkt Z von C aus zu diesem Punkte C zurückkehrt, wenn sich die durchlaufene Curve auf den blossen Punkt C reduciren lässt, ohne dass der $z = a$ entsprechende Punkt A überschritten wird.

Eben so erhält die Function u_1, welche der Gleichung

$$(z - a)(z - a')(z - a'') \ldots . u^m = (z - \mathfrak{a})(z - \mathfrak{a}')(z - \mathfrak{a}'') \ldots .$$

genügt, bei der Rückkehr des Punktes Z nach seinem Ausgangsorte C ihren Anfangswerth wieder, wenn die von Z beschriebene Curve auf den blossen Punkt C reducirt werden kann, ohne dass die den Werthen $a, a', a'', \ldots,$ $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}', \mathfrak{a}'' \ldots$ von z bezüglich entsprechenden Punkte $A, A', A'', \ldots$ $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \ldots$ überschritten werden.

Dasselbe gilt endlich von der Function u_1, welche durch die Gleichung

$$u^3 - u + z = 0$$

definirt ist, wenn sich die von Z beschriebene geschlossene Curve auf den blossen Punkt C ohne Ueberschreitung eines der beiden

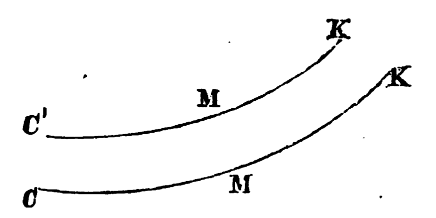
$z = +\frac{2}{3\sqrt{3}}$ und $z = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ entsprechenden Punkte A und A' reduciren lässt.

8. Wenn u_1 eine den vorhin angegebenen Bedingungen unterworfene algebraische Function von z bezeichnet, welche also stetig ist, der Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

genügt und sich für $z = c$ auf die Grösse b_1 reducirt, so stellt $\int_c^k u_1 dz$ bekanntlich die Summe der Produkte aus den Werthen der Function u_1 und den unendlich kleinen Zuwächsen vor, welche die Variable z während ihres Uebergangs von der untern Grenze c zur obern Grenze k erhält. Da nun z von c bis k, oder mit andern Worten der Punkt Z von C nach K auf unendlich viele Arten fortgehen kann und jedem Wege CMK (Fig. 5),

Fig. 5.



welchen der Punkt Z etwa durchläuft, ein endlicher und bestimmter Werth des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ entspricht, wofern nur die Function u_1 auf diesem Wege nirgends unendlich wird oder mit einer zweiten Wurzel der Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

zusammenfällt; so entsteht die Frage nach der Aenderung des Integrals $\int_c^k u_1 dz$, welche unendlich kleine Verschiebungen der Punkte C und K, so wie auch der Curve CMK zur Folge haben.

Weil nämlich diese Curve der Voraussetzung gemäss keinen Punkt enthält, für welchen die Function u_1 unendlich oder eine vielfache Wurzel ist, so gilt dasselbe auch von der unendlich nahe liegenden Curve $C'M'K'$, und es lässt sich dann wie in Nr. 5 beweisen, dass die Werthe von u_1 für zwei unendlich nahe liegende Punkte beider Curven unendlich wenig verschieden sind. Der Zuwachs des Integrals, welcher durch den Uebergang der einen in die andere hervorgebracht wird, kann daher nach den Regeln der Variationsrechnung gefunden werden, es ist nämlich

$$\delta\int_c^k u_1 dz = \int_c^k \delta(u_1 dz) = \int_c^k (u_1 d\delta z + \delta u_1 dz);$$

da nun aber die Ableitung $\frac{du_1}{dz}$ die Curve CMK entlang beständig einen endlichen Werth behält, wie die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{du_1}{dz} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

zeigt, wo nämlich $\frac{\partial f}{\partial u_1}$ nicht Null sein kann, so lange u_1 eine einfache Wurzel der Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

ist: so hat man

$$\delta u_1 = \frac{du_1}{dz}\delta z,$$

mithin

$$\delta u_1 dz = \frac{du_1}{dz}\delta z dz = du_1 \delta z,$$

und folglich

$$\delta\int_c^k u_1 dz = \int_c^k (u_1 d\delta z + du_1 \delta z) = \int_c^k d(u_1 \delta z),$$

oder auch, wenn b_1 und h_1 die Werthe von u_1 für die Punkte C und K sind,

$$\delta\int_c^k u_1 dz = h_1 \delta k - b_1 \delta c.$$

9. Aus diesen Gleichungen entspringen einige wichtige Folgerungen. Lässt man nämlich zuerst die Punkte C' und K' mit C und K zusammenfallen, so ist

$$\delta c = 0,\ \delta k = 0$$

und folglich

$$\delta \int_c^k u_1 dz = 0,$$

d. h.:

Das über die Curve CMK fortgeführte Integral $\int_c^k u_1 dz$ behält seinen Werth unverändert bei, wenn diese Curve zwischen den festen Punkten C und K eine Veränderung ihrer Gestalt erleidet, ohne dass jedoch einer von den Punkten, für welche die Function u_1 unendlich wird, oder mit einer zweiten Wurzel der Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

coincidirt, überschritten wird.

10. Nehmen wir ferner an, dass der Punkt K mit C zusammenfällt, also der Weg CMK zur geschlossenen Curve $CLMC$ (Fig. 4) wird, so ist

$$\delta k = \delta c,$$

mithin

$$\delta \int_c^k u_1 dz = (h_1 - b_1)\delta c;$$

so lange aber der Punkt C fest bleibt, ist

$$\delta c = 0,$$

und folglich

$$\delta \int_c^k u_1 dz = 0,$$

d. h.:

Das vom Punkte C aus über die geschlossene Curve $CLMC$ fortgeführte Integral $\int u_1 dz$ behält denselben Werth, wenn diese Curve ausserhalb des festen Punktes C eine Veränderung ihrer Gestalt erleidet, ohne dass einer von denjenigen Punkten überschritten wird, für welche die Function u_1 un-

endlich wird, oder mit einer zweiten Wurzel der Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

zusammenfällt.

11. Da das Product $(h_1 - b_1)\delta c$ auch für $h_1 = b_1$ verschwindet, so gilt unter der Voraussetzung, dass die Function u_1 denselben Werth wieder annimmt, sobald nur der Punkt Z zu demselben Orte C zurückkehrt, folgender Satz:

Ist die geschlossene Curve $CLMC$ von der Art, dass die Function u_1 nach vollbrachtem Umlauf des Punktes Z ihren Werth wieder erhält, so bleibt der Werth des über den ganzen Umfang dieser Curve fortgeführten Integrals $\int u_1 dz$ ungeändert, wenn sich die Verschiebung der Curve über keinen derjenigen Punkte hinaus erstreckt, für welche die Function u_1 unendlich wird, oder mit einer zweiten Wurzel der Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

zusammenfällt.

Wenn wir nun diesen Satz mit dem in Nr. 7 aufgestellten vereinigen, so ergibt sich folgender Satz:

Ist die geschlossene Curve $CLMC$ von der Art, dass sie auf den blossen Punkt C reducirt werden kann, und zwar ohne Ueberschreitung eines derjenigen Punkte, für welche die Function u_1 unendlich wird, oder mit einer zweiten Wurzel der Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

zusammenfällt; so ist der Werth des über den ganzen Umfang dieser Curve fortgeführten Integrals $\int u_1 dz$ gleich Null.

12. Wenn die Function u_1 ihren Anfangswerth wieder annimmt, sobald Z auf der geschlossenen Curve $CLMC$ einen Umlauf vollbracht hat, so ist der Werth des über den ganzen Umfang

dieser Curve ausgedehnten Integrals $\int u_1 dz$ unabhängig von der Lage des Anfangspunktes C desselben; denn es gilt immer die Voraussetzung, dass

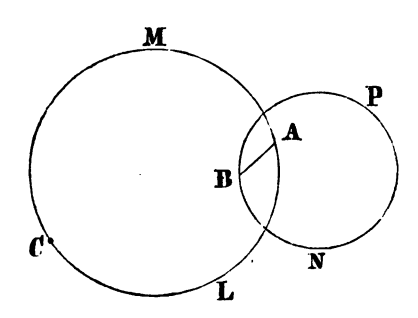
$$h_1 = b_1$$

ist, während der Punkt C auf der unbeweglich gedachten Curve $CLMC$ verschoben wird, mithin δc nicht gleich Null ist, und somit bleibt die Variation des Integrals $\int u_1 dz$ gleich Null.

Anders verhält es sich offenbar, wenn die Function ihren Anfangswerth nicht wieder annimmt, sobald Z auf der geschlossenen Curve einen Umlauf gemacht hat, weil alsdann nicht mehr die Differenz $h_1 - b_1$ gleich Null ist.

13. Damit nicht die Tragweite der vorstehenden Sätze unnütze Verkürzungen erleide, weil man unter *geschlossener Curve* eine Begrenzungslinie, die sich nicht selber schneidet, zu verstehen gewohnt ist, so mag nochmals darauf aufmerksam gemacht werden (Nr. 7), dass die geschlossene Curve, von welcher vorhin die Rede war, nicht der Umfang einer begrenzten Fläche, wie etwa eines Kreises, oder einer Ellipse zu sein braucht, sondern sich wie eine Lemniscate selber schneiden kann, und zwar beliebig vielmal; dass auch einer und derselbe Theil

Fig. 6.



dieser Curve, oder eine Zusammensetzung z. B. zweier Kreise *CLAM*, *BNP* und einer geraden Linie *AB* (Fig. 6) zu zwei-, oder

mehrmaligem Umlauf des Punktes Z dienen kann, hier etwa der Reihe nach der Bogen CLA, die Linie AB, der Kreis $BNPB$, die Linie BA und zuletzt der Bogen AMC.*)

14. Wir können nun auch, ohne an den Beweisen etwas zu ändern, in den soeben aufgestellten Sätzen an Stelle von u_1 eine rationale Function von u_1 und z substituiren, wofern nur diese auf dem von Z durchlaufenen Wege nirgends unendlich wird, und sodann die Reihenentwickelung für u_1 herleiten.

Es seien nämlich $a, a', a'', \ldots.$ die Werthe von z, für welche die Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

vielfache, oder unendlich grosse Wurzeln besitzt, und $A, A', A'' \ldots.$ die ihnen entsprechenden Punkte; ferner seien diese mit dem Ausgangsorte C des beweglichen Punktes Z durch gerade Linien verbunden; endlich sei um C ein Kreis σ mit einem Radius beschrieben, dessen Länge einer positiven, und zwar die kleinste der Längen $CA, CA', CA'', \ldots.$ nicht übersteigenden Grösse ϱ gleich ist, so dass alle jene Punkte A, A', A'', ... ausserhalb des Kreises liegen.

Für einen innerhalb des Kreises oder auf der Peripherie desselben liegenden Punkt kann nun die Function u_1 verschiedene Werthe annehmen, je nachdem der Punkt Z von C aus diesen oder jenen Weg zurückgelegt hat; während jedoch die Function

---

*) Obgleich Cauchy in den *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* vom Jahre 1846, wo sich die Sätze der Nummern 9, 10 und 11 finden, diejenigen Punkte, welche der durchlaufene Weg nicht überschreiten darf, bloss dadurch charakterisirt, dass die Function für diese Punkte discontinuirlich wird; so erschien es bei der Beschränkung auf algebraische Functionen genauer zu sagen: die Function u wird für dieselben unendlich, oder eine vielfache Wurzel der Gleichung

$$f(u,z) = 0.$$

u_1 nur **einen** und zwar ganz bestimmten Werth annehmen kann, wenn man die Bedingung festhält, dass der Weg überall innerhalb des Kreises σ bleibt, weil sich alle dieser Bedingung unterworfenen Wege durch Verschiebung zur Coincidenz bringen lassen, ohne dass dabei einer der Punkte $A, A', A'', \ldots$ überschritten wird. Dieser Werth der Function u_1 sei $\varphi(z)$.

Um denselben nach der von Cauchy mehrfach angewandten Methode in eine Reihe zu entwickeln, nehmen wir zuvörderst innerhalb des Kreises σ irgend einen Punkt Γ an, für welchen z den correspondirenden Werth γ hat, und betrachten dann den Ausdruck

$$\frac{\varphi(z)-\varphi(\gamma)}{z-\gamma},$$

der nämlich eine rationale Function von z und $\varphi(z)$ darstellt, welche nicht unendlich wird, so lange der Punkt Z innerhalb des Kreises σ bleibt; auch wenn $z=\gamma$ wird, in welchem Falle sich dieselbe auf die endliche Grösse $\varphi'(\gamma)$ reducirt. Lassen wir nun Z auf dem Umfange des Kreises σ einen Umlauf machen, so wird jene Function denselben Werth wieder annehmen und alsdann das Integral

$$\int \frac{\varphi(z)-\varphi(\gamma)}{z-\gamma}\,dz,$$

über den ganzen Umfang ausgedehnt, nach Nr. 11 den Werth Null haben, d. h. es ist

$$\int \frac{\varphi(z)-\varphi(\gamma)}{z-\gamma}\,dz = 0 \text{ oder } \varphi(\gamma)\int \frac{dz}{z-\gamma} = \int \frac{\varphi(z)\,dz}{z-\gamma},$$

wo sich die Integrationen über die ganze Peripherie des Kreises erstrecken.

Da aber das Integral $\int \frac{dz}{z-\gamma}$ zufolge Nr. 11 auf das über einen andern Kreis ausgedehnte Integral $\int \frac{dz}{z-\gamma}$, für das Centrum Γ und einen sehr kleinen Radius ε zurückgeführt, also dann

$$z-\gamma = \varepsilon e^{\vartheta i}$$

gesetzt werden kann, wo nur ϑ variabel ist, und mithin

$$dz = ee^{\vartheta i} d\vartheta i,$$

folglich

$$\int \frac{dz}{z-\gamma} = i\int_0^{2\pi} d\vartheta = 2\pi i;$$

so verwandelt sich obige Gleichung in

$$\varphi(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z-\gamma}.$$

Beachten wir nun, dass die Norm ϱ von $z - c$ auf dem Umfange σ selbst grösser als die Entfernung $C\Gamma$ ist, d. h. als die Norm von $\gamma - c$; dass sich also der Ausdruck

$$\frac{1}{z-\gamma} = \frac{1}{z-c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\gamma - c}{z-c}}$$

in eine convergente, nach den Potenzen von $\frac{\gamma-c}{z-c}$ aufsteigende Reihe:

$$\frac{1}{z-\gamma} = \frac{1}{z-c} + \frac{\gamma-c}{(z-c)^2} + \frac{(\gamma-c)^2}{(z-c)^3} + \ldots.$$

entwickeln lässt, so ergibt sich

$$\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z-\gamma} = \int \frac{\varphi(z)dz}{z-c} + (\gamma - c)\int \frac{\varphi(z)\,dz}{(z-c)^2} +$$

$$(\gamma-c)^2\int\frac{\varphi(z)dz}{(z-c)^3} + \ldots.$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung ebenfalls convergent ist, so hat man endlich für $\varphi(\gamma)$ folgende convergente, nach den Potenzen von $\gamma - c$ fortschreitende Reihenentwickelung:

$$\varphi(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int \frac{\varphi(z)dz}{z-c} + (\gamma-c)\int\frac{\varphi(z)\,dz}{(z-c)^2} + (\gamma-c)^2\int\frac{\varphi(z)dz}{(z-c)^3} + \ldots\right].$$

15. Nachdem die Existenz dieser Reihe nachgewiesen, bedarf es noch der Berechnung der Coefficienten, welche sich mit Hilfe des Taylor'schen Satzes finden lassen. Es ist nämlich

$$\varphi(\gamma) = \varphi(c) + \frac{\varphi'(c)}{1}(\gamma - c) + \frac{\varphi''(c)}{1 \,.\, 2}(\gamma - c)^2 + \ldots,$$

wo nun

$$\varphi(c) = b_1$$

ist. Bestimmt man jetzt aus den Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dz} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u}\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dz}\right) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial z}\frac{du}{dz} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0,$$

. . . .

die Werthe von $1 \cdot \frac{du}{dz}$, $1 \cdot 2 \cdot \frac{d^2u}{dz^2}, \ldots$, die bezüglich mit $F_1(u,z)$, $F_2(u,z), \ldots$ bezeichnet werden mögen, so erhalten die Grössen $\frac{\varphi'(c)}{1}$, $\frac{\varphi''(c)}{1 \cdot 2}, \ldots$ die Werthe $F_1(b_1,c)$, $F_2(b_1,c), \ldots$, folglich ist

$$(F)\ \varphi(\gamma) = b_1 + F_1(b_1,c).(\gamma - c) + F_2(b_1,c).(\gamma - c)^2 + \ldots..$$

Es unterliegt nach dieser Entwickelung keinem Zweifel, auf welche Wurzel der Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

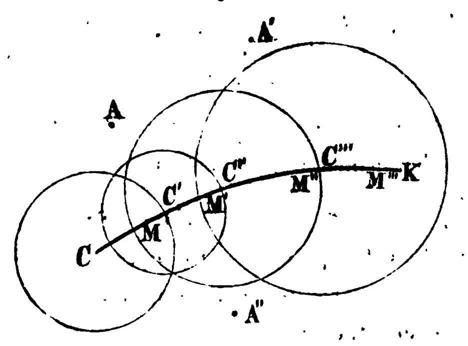
sich die Formel (F) bezieht; die auf der rechten Seite stehende Reihe gibt nämlich den $z = \gamma$ entsprechenden Werth derjenigen mit z continuirlich veränderlichen Wurzel, welche für $z = c$ den Werth b_1 erhält, vorausgesetzt, dass der Punkt Z von C nach Γ gelangt, ohne den Kreis σ zu verlassen, oder dass die Entfernung CZ immer kleiner als die kürzeste der Längen $CA, CA', CA'', \ldots$ bleibt. Die Formel findet nur für solche Werthe von γ Anwendung, für welche die Norm von $\gamma - c$ kleiner als diese kürzeste Länge ist, denn nur unter dieser Bedingung (N. 14) hat die Bezeichnung $\varphi(\gamma)$ einen bestimmten Sinn.

19. Bezeichnet jetzt k irgend einen Werth von z und K den ihm entsprechenden Punkt, welchen der bewegliche Punkt Z auf dem Wege CMK (Fig. 7) erreicht, ohne jedoch durch einen der Punkte $A, A', A'', \ldots$ zu gehen; so lässt sich der Werth h_1 der Function u_1 für $z = k$ auf folgende Weise berechnen.

Man construire um C einen Kreis, welcher keinen der Punkte $A, A', A'', \ldots$ einschliesst; falls dieser Kreis die Curve CMK vollständig umfasst, ersetze man in der Formel (F) nur γ durch k, um h_1 zu erhalten. Im andern Falle wird der Kreis die Curve CMK ein- oder mehrmal schneiden, und zwar sei C' der erste

Schnittpunkt dieser Curve, dann c' der entsprechende Werth von z, so dass der Werth b_1' von u_1 für den Punkt C' gewonnen

Fig. 7.



wird, wenn man in der Formel (F) γ durch c' ersetzt. Da die Curve CMK in die beiden Theile CMC' und $C'M'K$ zerfällt, so construire man um C' einen zweiten Kreis, von welchem die Punkte $A, A' A'', \ldots$ sämmtlich ausgeschlossen sind; falls dieser Kreis die Curve $C'M'K$ vollständig umfasst, ersetze man in der Formel (F) nur c durch c', b_1 durch b_1' und γ durch k, um h_1 zu erhalten. Im andern Falle wird der Kreis die Curve $C'M'K$ schneiden, und zwar sei C'' der erste Schnittpunkt dieser Curve, dann c'' der entsprechende Werth von z, so dass der Werth b_1'' von u_1 für den Punkt C'' gewonnen wird, wenn man in der Formel (F) c durch c', b_1 durch b_1' und γ durch c'' ersetzt. Da jetzt die Curve $C'M'K$ in die beiden Theile $C'M'C''$ und $C''M''K$ zerfällt, so construire man um C'' einen dritten Kreis, von welchem die Punkte $A, A', A'', \ldots$ sämmtlich ausgeschlossen sind. Durch Wiederholung dieser Construction wird man schliesslich einen Kreis um den Punkt $C^{(n)}$ erlangen, welcher die Curve $C^{(n)}M^{(n)}K$ vollständig umfasst; und alsdann in der Formel (F) c durch $c^{(n)}$, b_1 durch $b_1^{(n)}$ und γ durch k ersetzen, um endlich h_1 zu erhalten.

Wenn man den Umstand benutzt, dass die Curve CMK zwischen den festen Punkten C und K bis zu den Punkten $A, A', A'', \ldots$

verschoben werden kann, ohne dass die Grösse h_1 eine Aenderung erleidet, und ferner dass über die Radien der Kreise gar keine Bestimmung getroffen war, so kann man sich die Berechnung von h_1 erleichtern. Wir wollen indess bei diesem Gegenstande nicht länger verweilen.

12. Ausser der durch die Formel (F) gegebenen Entwickelung, welche nur so lange Anwendung findet, als der Punkt Z einen gewissen Kreis nicht verlässt, können noch viele andere, für den Umfang einer vom Kreise verschiedenen geschlossenen Curve anwendbare Entwickelungen aufgestellt werden.

Stellt $\psi(z)$ eine rationale Function von z vor, welche für $z=c$ verschwindet, während $z=x+yi$ ist, so ist die Norm von $\psi(z)$, die mit $n\psi(z)$ bezeichnet werden mag, eine Function von x und y, und die Gleichung

$$n\psi(z)=l$$

drückt für einen positiven constanten Werth von l eine algebraische Curve aus. Da alsdann für den Punkt C die Gleichung

$$n\psi(z)=0$$

gilt, so ergibt sich, dass ein Zweig dieser Curve für hinreichend kleine Werthe von l eine geschlossene Curve um den Punkt C bilden wird.*)

Nehmen wir jetzt an, dass die Curve s, welche sich für $l=0$ auf den Punkt C reducirt, während l von Null bis zu einem gewissen Werthe λ anwächst, an Umfang zunimmt, bis sie mit der geschlossenen Curve σ zusammenfällt; ferner dass für die Curve σ selbst, so wie für den eingeschlossenen Raum die Gleichung

$$\psi(z)=\psi(z')$$

nur für

$$z=z'$$

---

*) Cauchy hat in den *Comptes rendus de l'Académie, Tome IV*, p. 777 Betrachtungen über die Verwandlungen und Vereinigungen der verschiedenen Zweige dieser Curve für den Fall angestellt, wenn die Norm l von Null bis ins Unendliche anwächst.

gültig ist; dass ausserdem die Ableitung von $\psi(z)$ innerhalb dieses Raumes nicht verschwindet; dass endlich die Punkte $A, A', A'', \ldots$ sämmtlich von der Curve ausgeschlossen bleiben: so genügt es nur λ hinreichend klein zu nehmen.

Unter der Bedingung nun, dass der Punkt Z die Curve σ nicht überschreiten darf, kann die Function u_t für jeden Punkt nur einen Werth annehmen, welchen Lauf sie auch genommen haben mag, und zwar lässt sich dieser Werth gleich $\varphi(z)$, wie sogleich bewiesen werden soll, in eine convergente, nach den Potenzen von $\psi(z)$ fortschreitende Reihe entwickeln.

Weil der Ausdruck

$$\frac{\varphi(z)-\varphi(\gamma)}{\psi(z)-\psi(\gamma)}$$

für jeden Punkt Γ innerhalb der Curve σ, dem der Werth γ von z entspricht, eine rationale Function von z und $\varphi(z)$ darstellt, welche nicht unendlich wird, so lange der Punkt Z jene Curve nicht überschreitet, da sich dieselbe für $z=\gamma$ auf die endliche Grösse $\frac{\varphi'(\gamma)}{\psi'(\gamma)}$ reducirt; weil diese Function ausserdem denselben Werth wieder erhält, sobald Z auf der Curve einen Umlauf vollbracht hat; so ist das Integral

$$\int \frac{\varphi(z)-\varphi(\gamma)}{\psi(z)-\psi(\gamma)}\,dz,$$

über den ganzen Umfang der Curve ausgedehnt, gleich Null, mithin

$$\varphi(\gamma)\int\frac{dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)} = \int\frac{\varphi(z)\,dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)},$$

daher

$$\varphi(\gamma) = \frac{\displaystyle\int\frac{\varphi(z)\,dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)}}{\displaystyle\int\frac{dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)}},$$

wo sich die Integrationen wieder über den ganzen Umfang der Curve σ erstrecken.

Der Werth des Integrals

$$\int \frac{dz}{\psi(z) - \psi(\gamma)}$$

lässt sich ohne Mühe ermitteln; denn es ist

$$\frac{1}{\psi(z) - \psi(\gamma)} = \frac{1}{\psi'(\gamma)} \cdot \frac{1}{z - \gamma} + \varepsilon(z),$$

wo $\varepsilon(z)$ eine rationale Function von z bezeichnet, welche überall innerhalb der Curve σ und auf deren Umfang selbst endlich bleibt, folglich

$$\int \frac{dz}{\psi(z) - \psi(\gamma)} = \frac{1}{\psi'(\gamma)} \int \frac{dz}{z - \gamma} + \int \varepsilon(z) dz.$$

Da hier zufolge Nr. 11:

$$\int \varepsilon(z) dz = 0$$

ist; da ferner der Werth des Integrals $\int \frac{dz}{z-\gamma}$ ungeändert bleibt, wenn man dasselbe über einen um den Punkt Γ mit einem sehr kleinen Radius ϵ beschriebenen Kreis fortführt, da also

$$z - \gamma = \epsilon e^{\vartheta i}$$

gesetzt werden kann, wo nur ϑ variabel ist, demnach

$$\int \frac{dz}{z - \gamma} = i \int_0^{2\pi} d\vartheta = 2\pi i;$$

so ergibt sich

$$\int \frac{dz}{\psi(z) - \psi(\gamma)} = \frac{2\pi i}{\psi'(\gamma)}.$$

Beachten wir andererseits, dass die Norm von $\psi(z)$ für die Curve σ gleich λ und folglich grösser als die Norm von $\psi(\gamma)$ ist, dass sich also

$$\frac{1}{\psi(z) - \psi(\gamma)} = \frac{1}{\psi(z)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\psi(\gamma)}{\psi(z)}}$$

in eine convergente, nach den Potenzen von $\frac{\psi(\gamma)}{\psi(z)}$ aufsteigende Reihe:

$$\frac{1}{\psi(z) - \psi(\gamma)} = \frac{1}{\psi(z)} + \frac{\psi(\gamma)}{\psi^2(z)} + \frac{\psi^2(\gamma)}{\psi^3(z)} + \ldots$$

entwickeln lässt; so ergibt sich noch

$$\int \frac{\varphi(z)dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)} = \int \frac{\varphi(z)\,dz}{\psi(z)} + \psi(\gamma)\int \frac{\varphi(z)\,dz}{\psi^2(z)}$$
$$+\psi^2(\gamma)\int \frac{\varphi(z)dz}{\psi^3(z)} + \ldots\ldots$$

und folglich

$$\varphi(\gamma) = \frac{\psi'(\gamma)}{2\pi i}\left[\int \frac{\varphi(z)dz}{\psi(z)} + \psi(\gamma)\int \frac{\varphi(z)dz}{\psi^2(z)} + \psi^2(\gamma)\int \frac{\varphi(z)dz}{\psi^3(z)} + \ldots\right],$$

wo nun die Integrationen über den Umfang einer beliebigen, innerhalb der Curve σ liegenden geschlossenen Curve mit nur einem Umgang um C ausgedehnt werden können.

Wenn man diese Curve auf einen sehr kleinen um den Punkt C beschriebenen Kreis zurückführt, so lässt sich leicht beweisen, dass das Integral $\int \frac{\varphi(z)dz}{\psi^m(z)}$ gleich $2\pi i r_m$ ist, wo r_m das Residuum der Function $\frac{\varphi(z)}{\psi^m(z)}$ in Bezug auf $z = c$ bezeichnet*); alsdann lautet die vorstehende Gleichung:

$$\varphi(\gamma) = \psi'(\gamma)\,[r_1 + r_2\psi(\gamma) + r_3\psi^2(\gamma) + \ldots].$$

Für

$$\psi(z) = z - c$$

entspringt hieraus die Formel (F). Oder setzt man, um eine andere Anwendung zu machen,

$$\psi(z) = (z-c)(z-c'),$$

wo c' den Werth von z für den Punkt C' bezeichnet, so entspricht die Gleichung

$$n(z-c)(z-c') = l$$

dem Orte derjenigen Punkte, deren Entfernungen von den Punkten C und C' das Product l geben. Für Werthe von l, welche kleiner als $\frac{1}{4}\varDelta^2$ sind, wo $\varDelta$ die Länge CC' vorstellt, zerfällt der in

---

*) Siehe Moigno, *Leçons de calcul différentiel rédigées d'après les méthodes et les ouvrages publiés ou inédits de Mr. A. L.* Cauchy. *Paris* 1840. (41e *leçon*).

Rede stehende Ort in zwei geschlossene Curven, von denen eine den Punkt C umgibt, mit wachsendem l an Umfang zunimmt und für $l = \frac{1}{4}\Delta^2$ der Hälfte POQ (Fig. 8) einer Lemniscate mit den Brennpunkten C und C' gleich ist. Sollten die Punkte $A, A', A'', \ldots$ sämmtlich auf diesem Theile der Lemniscate, oder ausserhalb desselben liegen, so könnte man an Stelle der Curve σ die unendlich nahe liegende, $l = \frac{1}{4}\Delta^2 - \varepsilon$ entsprechende Curve, wo ε eine positive unendlich kleine Grösse bezeichnet, annehmen, weil offenbar auch dann noch alle oben angeführten Bedingungen erfüllt werden: denn die Ableitung $2z - c - c'$ von $\psi(z)$ verschwindet nur für den Werth $z = \frac{c+c'}{2}$, welcher dem ausserhalb der Curve σ liegenden Punkte O entspricht; ferner liefert die Gleichung

Fig. 8.

$$\psi(z) \qquad \psi(z')$$

für z' die beiden Werthe $z' = z$, $z' = c + c' - z'$, welche zwei Punkten entsprechen, von denen einer innerhalb der Curve σ liegt, während sich der andere ausserhalb derselben befindet, weil beide in Bezug auf den Punkt O symmetrische Lage haben.

Somit gilt die Gleichung

$$\varphi(\gamma) = (2\gamma - c - c')[r_1 + r_2(\gamma - c)(\gamma - c') + r_3(\gamma - c)^2(\gamma - c')^2 + \ldots],$$

wo r_m das Residuum von $\frac{\varphi(z)}{(z-c)^m (z-c')^m}$ in Bezug auf $z = c$ vorstellt, und zwar so lange der $z = \gamma$ entsprechende Punkt Γ innerhalb der Lemniscatenhälfte POQ bleibt.

Schliesslich mag noch bemerkt werden, dass man sich, um die Function u_1 für den Endpunkt einer gegebenen Curve auf dem in Nr. 16 bezeichneten Wege zu berechnen, ebenfalls dieser neuen Entwickelungen bedienen kann.

Da der Punkt Z in unendlich kleiner Entfernung von A genommen ist, so ist die Norm der Differenz $z - a = \alpha$ unendlich klein, so dass sich unter den der Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

entnommenen correspondirenden Werthen von u eine Anzahl von p Werthen finden, für welche die Norm der Differenz $u - b = \beta$ unendlich klein ist. Um diese zu bestimmen, hat man die p der Gleichung (1) genügenden unendlich kleinen Werthe von β aufzusuchen, zu deren genäherten Berechnung es nur der Terme von der niedrigsten Ordnung dieser Gleichung bedarf.

Gehen wir von dem gewöhnlichsten Falle aus, wo nämlich die partielle Ableitung $\frac{\partial f(u,z)}{\partial z}$ für $z = a$, $u = b$ nicht verschwindet, so besitzt die Gleichung (1) einen Term von der Form $B\alpha$, so dass dann offenbar die beiden Terme $A\beta^p$ und $B\alpha$ von niedrigerer Ordnung sind, als alle übrigen, und mithin die p gesuchten Werthe von β näherungsweise durch die Gleichung

$$A\beta^p + B\alpha = 0 \quad \text{oder} \quad \beta^p = h\alpha,$$

wo $h = -\frac{B}{A}$, gegeben sind. Nimmt man jetzt $\alpha = \varrho e^{\tau i}$, wo ϱ die Länge AZ und τ ihren Winkel gegen die Richtung der positiven x bezeichnet, und versteht unter $(h\varrho)^{\frac{1}{p}}$ einen der Werthe von $\sqrt[p]{h\varrho}$, so findet man für β folgende p der Gleichung

$$\beta^p = h\alpha$$

genügende Werthe:

$$\beta_1 = (h\varrho)^{\frac{1}{p}} e^{\frac{\tau}{p} i}, \quad \beta_2 = (h\varrho)^{\frac{1}{p}} e^{\frac{\tau + 2\pi}{p} i},$$

$$\beta_3 = (h\varrho)^{\frac{1}{p}} e^{\frac{\tau + 4\pi}{p} i}, \ldots, \beta_p = (h\varrho)^{\frac{1}{p}} e^{\frac{\tau + 2(p-1)\pi}{p} i}$$

Weil nun der Radiusvector ϱ denselben Werth wieder annimmt, und zwar ohne durch Null zu gehen, sobald der Punkt Z auf der Curve $CLMC$ nach vollendetem Umlaufe in seine anfängliche Lage C zurückkehrt, also auch $(h\varrho)^{\frac{1}{p}}$ wieder seinen Anfangs-

werth erhält; während dagegen der Winkel τ um 2π anwächst: so nimmt β_1 den Anfangswerth von β_2, β_2 den von β_3, u. s. f., endlich β_p den von β_1 an.

Dass es sich auch in aller Strenge so verhält, wenngleich wir für $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_p$ nur genäherte Werthe angegeben haben, zeigt sich auf folgende Weise. Obschon bei Vernachlässigung der Terme höherer Ordnungen in vorstehenden Formeln, vorausgesetzt β_1, $\beta_2, \ldots \beta_p$ bezeichneten die genauen Werthe jener Functionen, jedesmal ein Fehler von unendlich kleiner Grösse zu befürchten wäre, dessen Ordnung jedoch $\frac{1}{p}$ übersteigt, wenn ϱ als eine Grösse erster Ordnung gilt; so lässt der Umstand, dass die Gleichung (1) nur dasselbe Werthsystem für β liefern kann, sobald der Punkt Z wieder zu seinem Ausgangsorte gelangt, die Annahme nicht zu, dass der Endwerth von β_1 nach einem Umlauf von Z nicht mit dem Anfangswerthe von β_2 zusammenfalle, weil derselbe sonst mit dem Anfangswerthe einer andern, von β_2 verschiedenen Wurzel der Gleichung (1) identisch sein, mithin von jenem Anfangswerthe entweder um eine endliche, oder um eine unendlich kleine Grösse von der Ordnung $\frac{1}{p}$, die nicht gleich Null sein kann, so lange ϱ von Null verschieden ist, abweichen müsste. Da sich auf gleiche Weise ergibt, dass der Endwerth von β_2 mit dem Anfangswerthe von β_3 in aller Strenge zusammenfällt, u. s. f.; so gelangen wir zu folgendem Satze:

Falls die partielle Ableitung $\frac{\partial f(u,z)}{\partial z}$ für $z=a$, $u=b$ nicht verschwindet, lassen sich die p Functionen u_1, $u_2, \ldots u_p$, welche sämmtlich für den Punkt A gleich b werden, auf einem Kreise der Art anordnen, dass der einer jeden zukommende Endwerth, nachdem Z auf einer unendlich kleinen Curve den Punkt A umkreiset hat, dem Anfangswerthe der folgenden gleich ist.

Wir werden uns der Kürze wegen des Ausdrucks bedienen:

die Functionen bilden ein *cyklisches System* von p Termen um den Punkt A.

So wie der Punkt Z, wie bisher, die Curve $CLMC$ im *directen Sinne*, d. h. so, dass der Winkel τ wächst, durchlaufen hat, kann die Umkreisung auch im entgegengesetzten Sinne stattfinden, in welchem Falle die Endwerthe von u_1, $u_2, \ldots, u_p$ bezüglich die Anfangswerthe von u_p, u_1, $u_2, \ldots u_{p-1}$ sind.

Wenn der Punkt Z statt eines Umlaufs zwei Umläufe im directen Sinne macht, so sind die Endwerthe der Functionen u_1, $u_2, \ldots, u_p$ bezüglich gleich den Anfangswerthen von u_3, $u_4, \ldots$, u_2; nach drei Umläufen sind sie den Anfangswerthen von u_4, $u_5, \ldots$, u_3 gleich, u. s. f. Erst nach p Umläufen des Punktes Z erhalten diese Functionen ihre ursprünglichen Werthe wieder.

10. Da die gefundenen Resultate in den Fällen, wo die Ableitung $\frac{\partial f(u,z)}{\partial z}$ für $z = a$, $u = b$ verschwindet, nicht immer streng gültig sind, so bedarf es der Behandlung einer neuen Aufgabe, welche sich aus folgenden Gesichtspunkten übersehen lässt.

Um zunächst über das Verhalten der Wurzeln nach einem Umlauf des Punktes Z für den gegenwärtigen Fall Rechenschaft zu erhalten, suchen wir die Terme niedrigster Ordnung der Gleichung (1) auf. Wenn wir nämlich gewisse Terme T der Gleichung (1) von andern unterscheiden, in welchen die Exponenten von α und β zugleich kleiner sind, als in T (während jedoch einer von beiden Exponenten eben so gross sein kann) und die Summe der Terme T mit $\varDelta$, ferner die Summe der übrigen mit $\varDelta'$ bezeichnen, so dass

$$f(b+\beta,\ a+\alpha) = A\beta^{p} + \Sigma B\beta^{q}\alpha^{r} = \varDelta + \varDelta'$$

ist; so werden 1) die Terme niedrigster Ordnung sicher der Summe $\varDelta$ angehören und dann 2) wenn wir die Terme von $\varDelta$ nach den fallenden Exponenten von β anordnen, die Exponenten von α aufsteigen, weil sonst die Exponenten von α und β in einem

dieser Terme bezüglich kleiner als in einem andern sein würden, also der zweiten Summe Δ' zufielen. Demnach hat Δ folgende Form

$$\Delta = \mathrm{A}\beta^{p} + \mathrm{A}_1\beta^{p_1}\alpha^{q_1} + \mathrm{A}_2\beta^{p_2}\alpha^{q_2} + \ldots + \mathrm{A}_i\alpha^{q_i}$$

wo die Reihe ganzer Zahlen $p, p_1, p_2, \ldots, p_{i-1}$ fällt, während die Reihe ganzer Zahlen $q_1, q_2, \ldots, q_i$ steigt. Somit bietet sich folgende Aufgabe dar:

Aus den Termen des Polynoms Δ auf alle möglichen Arten Klassen zu bilden, deren jede nur solche Terme enthält, welche von gleicher und zwar niedrigerer Ordnung sind, als alle übrigen, wenn α als eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung betrachtet wird, während die Ordnung von β einer angemessenen Wahl unterliegt.

Sobald alle diese Klassen aufgestellt sind, hat man dieselben gleich Null zu setzen, um Gleichungen zu erhalten, durch welche ein oder mehrere der p unendlich kleinen Werthe von β näherungsweise bestimmt sind.

Stellen nämlich

$$\mathrm{A}^{(f)}\beta^{p_f}\alpha^{q_f},\quad \mathrm{A}^{(g)}\beta^{p_g}\alpha^{q_g}$$

zwei Terme gleicher Ordnung vor, während alle übrigen Terme von Δ **mindestens** von derselben Ordnung sind, und bezeichnet μ die Ordnung von β, so hat man

$$\mu p_f + q_f = \mu p_g + q_g$$

und für jeden andern von f und g verschiedenen Werth h:

$$\mu p_h + q_h \geqq \mu p_f + q_f.$$

(Sollen sich diese Bezeichnungen auf die Endterme von Δ beziehen, so hat man $p_0 = p$, $q_0 = 0$, $p_i = 0$ zu setzen.)

Um uns von der Bedeutung dieser Bedingungen eine klare Vorstellung zu bilden, betrachten wir die ganzen Zahlen p_k und q_k als die Abscisse und Ordinate eines Punktes M_k, so dass der Punkt M_0 (Fig. 10.) auf der x-Axe, der Punkt M_i auf der y-Axe, alle übrigen Punkte M_k innerhalb des Winkels der Positiven x und y

liegen, und dann die gerade Verbindungslinie irgend zweier dieser Punkte M_k und M_l die Axen auf der positiven Seite schneidet, weil nämlich, während die Abscisse p_k grösser als p_l ist, die Ordinate q_k kleiner als q_l sein muss.

Da sich nun ergibt, dass die Projection von OM_k auf einer geraden Linie OL, deren Gleichung den trigonometrischen Coefficienten $\frac{1}{\mu}$ besitzt, durch die Grösse $\frac{\mu p_k + q_k}{\sqrt{1+\mu^2}}$ dargestellt wird, so drückt die Gleichung

$$\mu p_f + q_f = \mu p_g + q_g$$

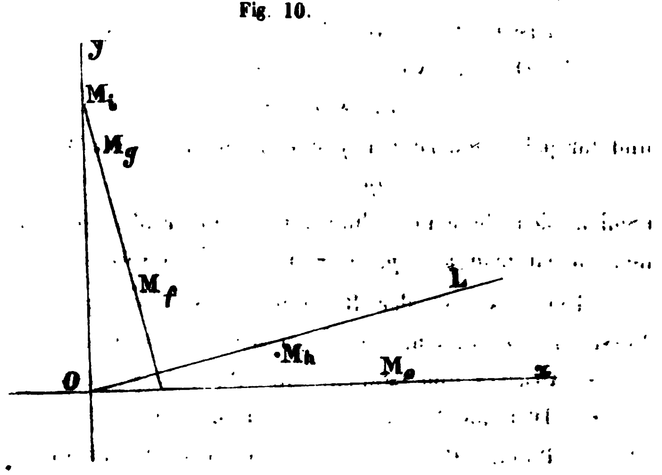
die Gleichheit der Projectionen von OM_f und OM_g auf OL, d. h. die Perpendicularität der Linien OL und M_fM_g aus, während der Bedingung

$$\mu p_h + q_h \geqq \mu p_f + q_f$$

zufolge die Projection von OM_h auf OL grösser oder wenigstens eben so gross als die von OM_f sein muss, so dass der Punkt M_h in Bezug auf den Anfangspunkt jenseits der Linie M_fM_g, oder auf dieser selbst liegt.

Es sind demnach, weil den zusammenzustellenden Termen des Polynoms Δ gewisse unter den Punkten M_0, M_1, M_2,.... entsprechen, offenbar auf alle möglichen Arten zwei Punkte M_f, M_g zu

Fig. 10.



ermitteln, deren Verbindungslinie $M_f M_g$ einerseits alle übrigen jener Punkte von dem Anfangspunkte andrerseits trennt. Wenn sich auf dieser Linie noch andere Punkte M_k, M_l, ... finden, und wenn die Gleichung

$$\mu p_f + q_f = \mu p_g + q_g$$

zur Bestimmung der Ordnung von β:

$$\mu = \frac{q_g - q_f}{p_f - p_g}$$

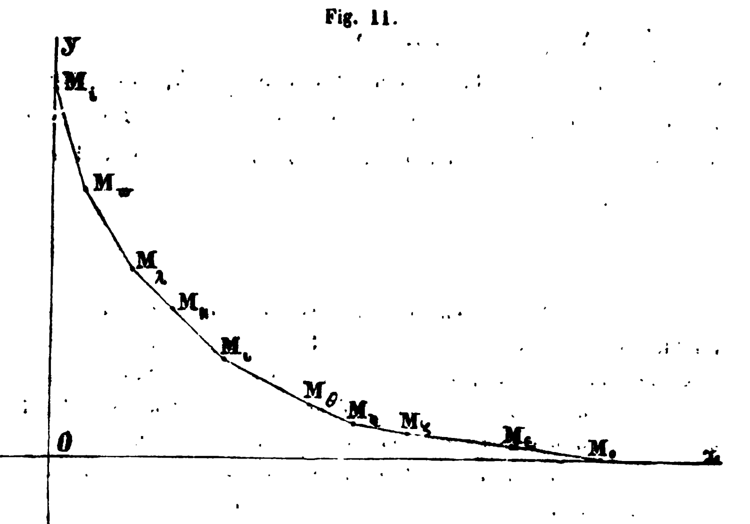
dient, so repräsentirt

$$K = A^{(f)} \beta^{p_f} \alpha^{q_f} + A^{(g)} \beta^{p_g} \alpha^{q_g} + A^{(k)} \beta^{p_k} \alpha^{q_k} + A^{(l)} \beta^{p_l} \alpha^{q_l} + \ldots$$

eine der verlangten Klassen, wo die Ordnung der Terme $\mu p_f + q_f$ durchweg dieselbe und zwar niedriger, als die aller übrigen Terme der Summe Δ, also überhaupt der Gleichung (1) ist.

Damit keine der Klassen K bei der Bildung derselben ausgelassen werde, verfahren wir auf folgende Weise. Wir nehmen im Punkte M_0 (Fig. 11.) eine mit der x-Axe zusammenfallende Linie an, drehen dieselbe um den Punkt M_0 in dem Sinne, dass sie immer die Axe der positiven y schneidet, und zwar bis sie durch einen der Punkte M_1, M_2, ... geht; fallen dann noch mehrere

Fig. 11.



Punkte M_ε, $M_\zeta, \ldots, M_\eta$, wo die Indices $\varepsilon, \zeta, \ldots, \eta$ der Grösse nach geordnet sind, in diese Linie, so bilden die den Punkten M_0, M_ε, $M_\zeta, \ldots, M_\eta$ entsprechenden Terme von $\mathcal{A}$ eine erste Klasse. Nun drehen wir die bewegliche Linie um den Punkt M_η immer in demselben Sinne fort, bis sie zu einem der Punkte $M_{\eta+1}$, $M_{\eta+2}, \ldots$ gelangt; alsdann entsprechen alle diejenigen Punkte M_η, $M_\Theta, \ldots, M_\iota$, welche der Linie in der neuen Lage angehören, den Termen der zweiten Klasse. Ferner drehen wir die Linie um den Punkt M_ι fort, wo sie die Punkte M_ι, $M_\varkappa, \ldots, M_\lambda$ verbinden mag, und bilden dann die den letzteren entsprechenden Terme der dritten Klasse. Fahren wir so fort, bis die bewegliche Linie durch den letzten Punkt M_i geht, so erhalten wir die folgenden Klassen:

$$K_1 = \mathrm{A}\beta^{p} + \mathrm{A}^{(\varepsilon)}\beta^{p_\varepsilon}\alpha^{q_\varepsilon} + \ldots + \mathrm{A}^{(\eta)}\beta^{p_\eta}\alpha^{q_\eta},$$

$$K_2 = \mathrm{A}^{(\eta)}\beta^{p_\eta}\alpha^{q_\eta} + \mathrm{A}^{(\Theta)}\beta^{p_\Theta}\alpha^{q_\Theta} + \ldots + \mathrm{A}^{(\iota)}\beta^{p_\iota}\alpha^{q_\iota},$$

$$K_3 = \mathrm{A}^{(\iota)}\beta^{p_\iota}\alpha^{q_\iota} + \mathrm{A}^{(\varkappa)}\beta^{p_\varkappa}\alpha^{q_\varkappa} + \ldots + \mathrm{A}^{(\lambda)}\beta^{p_\lambda}\alpha^{q_\lambda},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$K_\omega = \mathrm{A}^{(\tilde{\omega})}\beta^{p_{\tilde{\omega}}}\alpha^{q_{\tilde{\omega}}} + \ldots + \mathrm{A}^{(i)}\alpha^{q_i},$$

wo also der erste Term der ersten Klasse K_1 unabhängig ist von α, der letzte Term der letzten Klasse K_ω von β und endlich der letzte Term einer jeden Klasse zugleich der erste Term der folgenden ist.*)

---

*) Obgleich die den einzelnen Termen von $\mathcal{A}'$ entsprechenden Punkte auf die hier ausgesprochene Regel für die Drehung der beweglichen Linie keinen Einfluss haben, weil diese Punkte sämmtlich für den Anfangspunkt auf der entgegengesetzten Seite der Linie bleiben, so ist die Zerlegung der linken Seite der Gleichung (1) in die beiden Polynome $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ beim Aufsuchen der Klassen doch zur Abkürzung dienlich, wenn auch nicht erforderlich.

Wenn man diese verschiedenen Klassen der Reihe nach gleich Null setzt, so erhält man die Gleichungen für die unendlich kleinen Näherungswerthe von β. So liefert die Gleichung

$$K_1 = 0,$$

nachdem durch $\beta^{p_\iota}\alpha^{q_\eta}$ dividirt worden, $p_\eta - p_\iota$ Werthe von der Ordnung $\frac{q_\iota - q_\eta}{p_\eta - p_\iota}$; ferner die Gleichung

$$K_2 = 0,$$

nachdem durch $\beta^{p_\lambda}\alpha^{q_\iota}$ dividirt worden, $p_\iota - p_\lambda$ Werthe von der Ordnung $\frac{q_\lambda - q_\iota}{p_\iota - p_\lambda}$, u. s. f.; endlich die Gleichung

$$K_\omega = 0,$$

nachdem durch α^{q_ω} dividirt worden, p_ω Werthe für β von der Ordnung $\frac{q_i - q_\omega}{p_\omega}$, so dass im Ganzen

$$p - p_\eta + p_\eta - p_\iota + p_\iota - p_\lambda + \ldots + p_\omega,$$

d. h. eben p unendlich kleine Werthe von β verhanden sind.

Da das vorhin construirte Polygon $M_0 M_\eta M_\iota \ldots M_\omega M_i$ gegen den Anfangspunkt convex ist, da also die Zahlenwerthe der trigonometrischen Coefficienten der Linien $M_0 M_\eta$, $M_\eta M_\iota$, $M_\iota M_\lambda$, ..., $M_\omega M_i$ zunehmen, also

$$\frac{q_\eta}{p - p_\eta} < \frac{q_\iota - q_\eta}{p_\eta - p_\iota} < \frac{q_\lambda - q_\iota}{p_\iota - p_\lambda} < \ldots < \frac{q_i - q_\omega}{p_\omega}$$

ist; so müssen die aus der Gleichung

$$K_1 = 0$$

für β sich ergebenden kleinen Werthe von niedrigerer Ordnung sein, als die aus der Gleichung

$$K_2 = 0$$

entspringenden, diese wieder von niedrigerer Ordnung, als die in der Gleichung

$$K_3 = 0$$

enthaltenen, u. s. f.

Betrachten wir nun eine dieser Gleichungen insbesondere, z. B.

$$K_2 = 0$$

oder

$$A^{(\eta)}\beta^{p_\eta - p_\iota} + A^{(\Theta)}\beta^{p_\Theta - p_\iota}\alpha^{q_\Theta - q_\eta} + \ldots + A^{(\iota)}\alpha^{q_\iota - q_\eta} = 0.$$

Da die hieraus für β entspringenden Werthe von der Ordnung $\mu = \frac{q_\iota - q_\eta}{p_\eta - p_\iota}$ sind, d. h., wenn man den gemeinschaftlichen Factor φ von Zähler und Nenner forthebt,

$$\mu = \frac{r}{s};$$

da ferner alle Terme jener Gleichung von gleich hoher Ordnung sind, also

$$\mu(p_\eta - p_\iota) = \mu(p_\Theta - p_\iota) + q_\Theta - q_\eta = \ldots = q_\iota - q_\eta$$

oder, wenn hier mit s multiplicirt wird,

$$r(p_\eta - p_\iota) = r(p_\Theta - p_\iota) + s(q_\Theta - q_\eta) = \ldots = s(q_\iota - q_\eta) = rs\varphi$$

ist; und weil nun die Summe $r(p_\Theta - p_\iota) + s(q_\Theta - q_\eta)$ durch s theilbar ist, d. h. also der Theil $r(p_\Theta - p_\iota)$ derselben, wo aber r und s keinen gemeinschaftlichen Factor besitzen: so muss $\frac{p_\Theta - p_\iota}{s}$ eine ganze Zahl ψ sein. Setzt man jetzt in der Gleichung

$$r(p_\Theta - p_\iota) + s(q_\Theta - q_\eta) = rs\varphi$$

$s\psi$ an Stelle von $p_\Theta - p_\iota$, so ergibt sich

$$q_\Theta - q_\eta = r(\varphi - \psi),$$

mithin verwandelt sich die Gleichung

$$K_2 = 0$$

in:

$$A^{(\eta)}\beta^{s\varphi} + A^{(\Theta)}\beta^{s\psi}\alpha^{r(\varphi - \psi)} + \ldots + A^{(\iota)}\alpha^{r\varphi} + 0$$

oder, wenn man $\beta^s = \alpha^r x$ setzt, in

$$(2) \qquad A^{(\eta)}x^\varphi + A^{(\Theta)}x^\psi + \ldots + A^{(\iota)} = 0.$$

Bezeichnen wir nun die aus dieser Gleichung sich ergebenden φ Werthe von x, welche sämmtlich von Null verschieden sind und zunächst auch s ä m m t l i c h v o n e i n a n d e r v e r s c h i e d e n sein mögen, mit $h_1, h_2, \ldots, h_\varphi$; setzen dann in der Relation $\beta^s = \alpha^r x$ die erste Wurzel $x = h_1$ und auserdem wie früher $\alpha = \varrho e^{\pi\iota}$ ein; so finden wir für β folgende s Werthe:

$$
(3)\begin{cases}
\beta_1 = (h_1\varrho^r)^{\frac{1}{s}} e^{\frac{r\tau}{s}i}, \quad \beta_2 = (h_1\varrho^r)^{\frac{1}{s}} e^{\frac{r(\tau+2\pi)}{s}i}, \\
\beta_3 = (h_1\varrho^r)^{\frac{1}{s}} e^{\frac{r(\tau+4\pi)}{s}i}, \ldots\ldots, \quad \beta_s = (h_1\varrho^r)^{\frac{1}{s}} e^{\frac{r[\tau+2(s-1)\pi]}{s}i},
\end{cases}
$$

wo $(h_1\varrho^r)^{\frac{1}{s}}$ einen der Werthe von $\sqrt[s]{h_1\varrho^r}$ vorstellt. Um noch die übrigen Näherungswerthe von β, also überhaupt alle $s\varphi = p - p_\eta$ der Gleichung

$$K_2 = 0$$

genügenden Werthe zu erhalten, brauchen wir nur in die eben gefundenen an Stelle von h_1 der Reihe nach h_2, $h_3, \ldots\ldots, h_\varphi$ einzusetzen.

Weil nun ϱ denselben Werth wieder annimmt, ohne durch Null zu gehen, sobald der Punkt Z den Punkt A in directem Sinne umkreiset und in seine anfängliche Lage C zurückkehrt, folglich auch der Factor $(h_1\varrho^r)^{\frac{1}{s}}$ seinen Anfangswerth wieder erhält; während dagegen der Winkel τ um 2π anwächst: so geht jeder der s Werthe von β des Systems (3) in den Anfangswerth des folgenden über.

Die Herleitung der so eben interpretirten Ausdrücke (3) geschah allerdings auf dem Wege der Näherung, dessenungeachtet muss es sich in aller Strenge so verhalten. Dass nämlich auch dann, wenn βk und $\beta k+1$ die wahren Werthe zweier durch die Näherungswerthe

$$(h_1\varrho^r)^{\frac{1}{s}} e^{\frac{r[\tau+(2k-2)\pi]}{s}i}, \quad (h_1\varrho^r)^{\frac{1}{s}} e^{\frac{r(\tau+2k\pi)}{s}i}$$

gegebenen Functionen von α bezeichneten, der Endwerth von βk nach einem Umlauf von Z auf der unendlich kleinen Curve $CLMC$ mit dem Anfangswerthe von $\beta k+1$ identisch ist, wird durch den Umstand bedingt, dass das ganze System der Werthe von β nach einem Umlauf von Z wiederkehren, und dass folglich der Endwerth von βk mit dem Anfangswerthe einer andern Wurzel β' der Gleichung (1) zusammenfallen muss.

Zunächst muss nämlich β', wie βk, mit α zu Null herabsinken, somit einer der Gleichungen

$$K_1 = 0, \ K_2 = 0, \ldots\ldots, \ K\omega = 0$$

näherungsweise Genüge leisten, und zwar, da β' ausserdem wie β_k eine unendlich kleine Grösse von der Ordnung $\frac{r}{s}=\frac{p_\iota-q_\eta}{p_\eta-q_\iota}$ sein muss, der Gleichung

$$K_2=0$$

entsprechen, weil die den Gleichungen

$$K_1=0,\ K_3=0,\ \ldots\ K_\omega=0$$

genügenden Wurzeln, wie wir gesehen haben, von anderer Ordnung sind. Da nun aber die Ordnung der in den Formeln (3) begangenen unendlich kleinen Fehler $\frac{r}{s}$ übersteigt, so kann die Function β', deren Anfangswerth dem Endwerthe von $\beta_\varkappa$ gleich sein soll, widrigenfalls jener um eine Grösse von der Ordnung $\frac{r}{s}$ von diesem abweichen würde, nur β_{k+1} sein.

Somit ergibt sich, dass die durch die Gleichung

$$K_2=0$$

gegebenen unendlich kleinen Werthe von β in φ Klassen zerfallen, welche den Wurzeln $h_1, h_2, \ldots, h_\varphi$ der Gleichung (2) entsprechen, und dass die s Functionen einer Klasse dergestalt cyklisch angeordnet werden können, dass jede derselben nach einem Umlauf von Z dem Anfangswerthe der folgenden gleich wird; dass also jede solche Klasse ein cyklisches System ist (Nr. 18).

Wenn wir, um dieselbe Methode überhaupt auf alle Gleichungen

$$K_1=0,\ K_2=0,\ldots,\ K_\omega=0$$

anzuwenden, mit φ_1 den gemeinschaftlichen Factor von $p-p_\eta$ und q_η, mit φ_2 den von $p_\eta-p_\iota$ und $q_\iota-q_\eta$, mit φ_3 den von $p_\iota-p_\lambda$ und $q_\lambda-q_\iota$, u. s. f. bezeichnen, ferner mit $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_\omega$ die ganzen Zahlen $\frac{p-p_\eta}{\varphi_1}, \frac{p_\eta-p_\iota}{\varphi_2}, \frac{p_\iota-p_\lambda}{\varphi_3}, \ldots, \frac{p_\omega}{\varphi_\omega}$; so finden wir, dass sich die durch die Gleichung

$$K_1=0$$

gegebenen unendlich kleinen Werthe von β in φ_1 cyklische Sy-

steme sondern, deren jedes aus s_1 Termen besteht; dass ebenso die aus der Gleichung

$$K_2 = 0$$

entspringenden in φ_2 cyklische Systeme von s_2 Termen zerfallen, u. s. f. bis zu den durch die Gleichung

$$K_\omega = 0$$

gegebenen Werthen, die φ_ω cyklische Systeme von s_ω Termen bilden.

Wir haben erkannt, dass die für $z = a$ in den gemeinsamen Werth b übergehenden Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_p$ von z, auf die sich, den Gleichungen

$$z = a + \alpha, \quad u = b + \beta$$

gemäss, die mit α gleichzeitig verschwindenden Werthe von β beziehen, immer eine gewisse Anzahl cyklischer Systeme um den um Punkt A darstellen. Wenn wir andererseits auch auf die Fälle Rücksicht nehmen, wo sich nur ein System darbietet, wo verschiedene Systeme ungleich viel Terme umfassen, wo endlich Systeme durch isolirte Terme vertreten sind; wenn wir also sowol die Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_p$, deren Anfangswerthe sämmtlich von b unendlich wenig verschieden sind, als auch die übrigen Functionen $u_{p+1}, u_{p+2}, \ldots$, deren Anfangswerthe von den einfachen Wurzeln der Gleichung

$$f(u, a) = 0$$

sehr wenig abweichen und nach einem Umlauf des Punktes Z auf der Curve $CLMC$ wiederkehren, welche mithin als aus isolirten Termen bestehende Systeme erscheinen, ohne Unterschied zusammenfassen: so finden die gewonnenen Resultate ihren Ausdruck in folgendem Satze:

Die verschiedenen der Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

genügenden Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ können immer als eine gewisse Anzahl cyklischer Systeme um den Punkt A dargestellt werden.

20. Nachdem wir diesen Satz festgestellt haben unter der Voraussetzung, dass die Gleichung (2), so wie auch die übrigen, den Polynomen $K_1, K_2, \ldots, K_\omega$ entsprechenden Gleichungen nur ungleiche Wurzeln besitzen, wollen wir gegenwärtig den Fall untersuchen, wo die Gleichung (2) t Wurzeln h_1 hat. In diesem Falle enthält jede der Formeln (3) t Näherungswerthe von β zugleich, und es ist dann erforderlich, dass man für die st Werthe von β, welche der Wurzel h_1 entsprechen, zu weiterer Näherung fortschreitet.

Zu diesem Zwecke setzen wir in die Gleichung (1) die Werthe

$$\alpha = \alpha'^s, \ \beta = h_1^{\frac{1}{s}} \alpha'^r + \beta'$$

ein, wodurch sich eine Gleichung (1') zwischen α' und β' ergibt, welche st unendlich kleine Werthe von β' liefert, deren Ordnung die Zahl r übersteigt, wenn hier α' als eine Grösse erster Ordnung betrachtet wird. Hiernach wenden wir auf die Gleichung (1') dieselbe Methode an, deren wir uns zur Unterscheidung der Terme niedrigster Ordnung der Gleichung (1) bedienten, und finden alsdann zur genäherten Bestimmung von β' Gleichungen, welche

$$K_1 = 0, \ K_2 = 0, \ldots.$$

analog sind, von denen wir aber nur diejenigen beibehalten, welche für β' solche Werthe liefern, deren Ordnung die Zahl r übersteigt.

Eine dieser Gleichungen $K' = 0$ wird nun durch Substitution von $\beta'^{s'} = \alpha'^{r'} x'$ für zwei passend gewählte ganze Zahlen r' und s' die der Gleichung (2) analoge Form

$$(2') \qquad A'x'^{\varphi'} + B'x'^{\psi'} + \ldots. = 0$$

erhalten, für die wir jetzt voraussetzen wollen, dass keine gleichen Wurzeln vorhanden sind. Bezeichnen wir mit h' eine der Wurzeln, so finden sich unter den in Rede stehenden st Werthen von β folgende ss' Näherungswerthe:

$$\alpha'^s = \alpha, \ \beta'^{s'} = \alpha'^{r'} h', \ \beta = h_1^{\frac{1}{s}} \alpha'^r + \beta',$$

welche auch durch folgende Gleichung gegeben sind:

$$\beta = h_1^{\frac{1}{s}} \varrho^{\frac{r}{s}} e^{\frac{r(\tau + 2k\pi)}{s} i} + h' \varrho^{\frac{r'}{ss'}} e^{\frac{r'\left(\frac{\tau + 2k\pi}{s} + 2k'\pi\right)}{s'} i},$$

wo k alle ganzen Zahlen von 0 bis $s-1$ und k' alle Zahlen von 0 bis $s'-1$ durchläuft. Bezeichnen wir die rechte Seite mit $\beta_{k,k'}$, so lassen sich daher die ss' genügenden Werthe in folgender Ordnung cyklisch aufstellen:

$$(3')\left\{\begin{array}{l}\beta_{0,0},\quad \beta_{1,0},\quad \beta_{2,0},\ldots,\quad \beta_{s-1,0},\quad \beta_{0,1},\quad \beta_{1,1},\quad \beta_{2,1},\ldots,\\ \beta_{s-1,1},\quad \beta_{0,2},\ldots,\quad \beta_{0,s'-1},\quad \beta_{1,s'-1},\quad \beta_{2,s'-1},\ldots,\quad \beta_{s-1,s'-1}.\end{array}\right.$$

Da nun diese Werthe von β nach einem in directem Sinne auf der Curve $CLMC$ vollbrachten Umlaufe von Z, während der Winkel τ bis 2π anwächst und jeder der vorstehenden Werthe von β dem Anfangswerthe des folgenden gleich wird, ein cyklisches System bilden; so entsprechen den verschiedenen Wurzeln h' der Gleichung ($2'$) ebenfalls cyklische Werthsysteme von β, und folglich hat der am Schlusse von Nr. 19 aufgestellte Satz auch in dem soeben betrachteten Falle seine volle Gültigkeit.

Sollte die Gleichung ($2'$) selbst gleiche Wurzeln besitzen, etwa die t'-fache Wurzel von h', so würden dieser $ss't'$ Werthe von β entsprechen, und es würde jeder der Ausdrücke ($3'$) als Näherungswerth von t' derselben erscheinen. Durch Substitution von

$$\alpha = \alpha'^{s} = \alpha''^{ss'},\ \beta = h_1^{\frac{1}{s}}\alpha''^{rs'} + h'^{\frac{1}{s'}}\alpha''^{r'} + \beta''$$

in die Gleichung (1) würde sich alsdann eine Gleichung ($1''$) zwischen α'' und β'' ergeben, welche für β'' eine Reihe von $ss't'$ unendlich kleinen Werthen liefert, deren Ordnung die Zahl r' übersteigt, wenn α'' als eine Grösse erster Ordnung angesehen wird. Die weitere Ausführung dieser Methode würde schliesslich zu abgesonderten Näherungsformeln für sämmtliche unendlich kleine Werthe von β führen müssen, weil sonst Werthe von β einander gleich sein würden, wie gross auch α sein mag, d. h. gleiche Werthe von u vorhanden wären, was auch z sein mag, und folglich die Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

nicht irreductibel sein würde. Zugleich erkennen wir aus der Form der Näherungswerthe, dass sich die Werthe von β immer als cyklische Systeme darstellen werden. Somit ist

endlich für alle Fälle die Gültigkeit des in Nr. 19 aufgestellten Satzes dargethan.

21. Wir haben durch die vorstehende Auseinandersetzung bewiesen, dass die mit $u_1, u_2, \ldots, u_p$ bezeichneten Functionen von z immer in eine gewisse Anzahl cyklischer Systeme zerfallen, und ferner eine Methode zur Darstellung derselben mitgetheilt; es wird nun von Nutzen sein zu zeigen, dass sich diese Functionen mit Hilfe derselben Methode in convergente, nach den gebrochenen Potenzen von $z-a$ fortschreitende Reihen entwickeln lassen.

Wenn die Zahl p gleich Eins ist, so gelangt man wieder zu dem in Nr. 14 bereits behandelten Falle, wo die Entwickelung der Function u_1 nach den ganzen Potenzen von $z-a$ aufsteigt. Wir schreiten gleich zu dem Falle in Nr. 18, wo p eine beliebige Zahl ist, während die Ableitung $\frac{\partial f(u,z)}{\partial z}$ für $u=b$, $z=a$ nicht verschwindet. Mit Beibehaltung der in dieser Nummer geltenden Bezeichnungen geben wir der Gleichung (1) folgende Form:

$$A\beta^p + B\alpha + \Sigma C\beta^q\alpha^r = 0,$$

wo r nicht Null sein kann, wenn q grösser als p ist, und wo q nicht Null sein kann, wenn r die Einheit übersteigt. Führen wir durch Substitution von $\alpha = \alpha'^p$ und $\beta = \alpha' v$ einerseits eine neue Variable α' ein, deren Ordnung mit der Ordnung der p unendlich kleinen Werthe von β übereinstimmt, und andererseits die Function v, welche demgemäss p correspondirende Werthe von endlicher Grösse erhält, dividiren hierauf durch α'^p; so geht die Gleichung (1) in folgende über:

$$(4) \qquad Av^p + B + \Sigma Cv^q\alpha'^{(r-1)p+q} = 0,$$

welche, da offenbar der Exponent $(r-1)p+q$ wenigstens gleich Eins ist, für $\alpha'=0$ die p endlichen und ungleichen, in $\sqrt[p]{-\frac{B}{A}}$ enthaltenen Werthe $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$ von v liefert. Diejenige der Gleichung (4) genügende stetige Function v_n von α', welche für $\alpha'=0$ den Werth γ_n annimmt, kann nun nach Nr. 14

in eine convergente, nach den ganzen Potenzen von α' aufsteigende Reihe

$$v_n = \gamma_n + a_n\alpha' + b_n\alpha'^2 + c_n\alpha'^3 + \ldots,$$

entwickelt werden, wo die Coefficienten $a_n, b_n, c_n, \ldots$ rationale Functionen von γ_n und von den Coefficienten der Gleichung (4) sind, die sich mit Hilfe des Taylor'schen Satzes leicht berechnen lassen, vorausgesetzt, dass die Norm von α' die kleinste der Normen solcher von Null verschiedenen Werthe von α', für welche die Gleichung (4) vielfache, oder unendliche Wurzeln besitzt, nicht übersteigt. Somit hat man für den correspondirenden Werth β_n von β die Reihe

$$\beta_n = \gamma_n\alpha' + a_n\alpha'^2 + b_n\alpha'^3 + c_n\alpha'^4 + \ldots$$

oder

$$\beta_n = \gamma_n\alpha^{\frac{1}{p}} + a_n\alpha^{\frac{2}{p}} + b_n\alpha^{\frac{3}{p}} + c_n\alpha^{\frac{4}{p}} + \ldots,$$

welche gültig ist, so lange die Norm von α die kleinste Norm solcher von Null verschiedenen Werthe von α, für welche die Gleichung (1) vielfache Wurzeln besitzt, nicht übersteigt, da die Norm von α gleichzeitig mit der von α' zu- oder abnimmt. So lange also der Punkt Z innerhalb desjenigen Kreises bleibt, welcher um den Punkt A mit der kleinsten der Längen AA', AA'',.... als Radius beschrieben ist, gilt die Gleichung

$$u_n = \gamma_n(z-a)^{\frac{1}{p}} + a_n(z-a)^{\frac{2}{p}} + b_n(z-a)^{\frac{3}{p}} + c_n(z-a)^{\frac{4}{p}} + \ldots,$$

wo der Index n alle ganzen Zahlen von 1 bis p zu durchlaufen hat, damit alle p Funktionen $u_1, u_2, \ldots, u_p$ durch convergente Reihen ausgedrückt werden, welche nach den gebrochenen Potenzen von $z-a$ fortschreiten.

22. Wir wollen jetzt, wie in Nr. 19 voraussetzen, dass die Ableitung $\frac{\partial f(u,z)}{\partial z}$ für $u=b$, $z=a$ verschwindet, dass also der Term $B\alpha$ in der Gleichung (1) fehlt. Wenn wir insbesondere die $s\varphi$ unendlich kleinen Näherungswerthe von β, welche die Gleichung

$$K_2 = 0$$

liefert, ins Auge fassen, mit Rücksicht darauf, dass die Glei-

chung (1), der dieselben in aller Strenge genügen, die Form

$$K_2 + \Sigma C\beta^k\alpha^l = 0,$$

annimmt, wo die Terme der Summe Σ von höherer Ornung sind als die von K_2, wenn α von der ersten und β von der Ordnung $\mu = \frac{r}{s}$ ist; so ergeben sich die Relationen

$$\frac{r}{s}k + l > \frac{r}{s}p_\eta + q_\eta$$

oder

$$r(k-p_\eta) + s(l-q_\eta) > 0.$$

Setzen wir nun $\alpha = \alpha'^s$, wodurch die Uebereinstimmung der Ordnungen von α'^r und der in Rede stehenden Werthe von β herbeigeführt ist, und dann $\beta = \alpha'^r v$, wo v eine Function bezeichnet, die $s\varphi$ correspondirende Werthe von endlicher Grösse erhält; so verwandelt sich die Gleichung (1), nachdem durch $\alpha'^{rp_\eta + sq_\eta}$ dividirt worden, in:

$$A^{(\eta)} v^{p_\eta} A + {}^{(\Theta)} v^{p_\Theta} + \dots + A^{(\iota)} v^{p_\iota} + \Sigma C v^k \alpha'^{r(k-p_\eta) + s(l-q_\eta)} = 0$$

oder, wenn mit σ eine Zahl bezeichnet wird, die grösser oder wenigstens eben so gross als die Einheit ist, in

$$(5)\quad v^{p_\iota}\left(A^{(\eta)} v^{s\varphi} + A^{(\Theta)} v^{s\psi} + \dots + A^{(\iota)}\right) + \Sigma C v^k \alpha'^\sigma = 0,$$

und alsdann für α' 0 in die Gleichung

$$(6)\quad A^{(\eta)} v^{s\varphi} + A^{(\Theta)} v^{s\psi} + \dots + A^{(\iota)} = 0,$$

die für v offenbar $s\varphi$ endliche, von Null verschiedene Werthe γ_1, $\gamma_2, \dots, \gamma_{s\varphi}$ liefert, nämlich die verschiedenen in den Wurzeln $\sqrt[s]{h_1}$, $\sqrt[s]{h_2}, \dots, \sqrt[s]{h_\varphi}$ enthaltenen, wo h_1, $h_2, \dots, h_\varphi$ wieder die Wurzeln der Gleichung (2) vorstellen. Sind nun, was jetzt vorausgesetzt wird, diese sämmtlich ungleich, so sind es auch jene.

Für die sich aus der Gleichung (5) ergebende stetige Function v_n von α', welche für $\alpha' = 0$ den Werth γ_n annimmt, erhalten wir nach Nr. 14 folgende convergente, nach den ganzen Potenzen von α' fortschreitende Entwickelung:

$$v_n = \gamma_n + a_n\alpha' + b_n\alpha'^2 + \dots,$$

deren Gültigkeit an die Bedingung gebunden ist, dass die Norm von α' die kleinste derjenigen Normen, welche den vielfachen oder unendlich grossen Wurzeln der Gleichung (5) entsprechenden, von Null verschiedenen Werthen von α' angehören, nicht übersteigt. Bezeichnet β_n den correspondirenden Werth von β, so ist daher auch

$$\beta_n = \gamma_n \alpha'^r + a_n \alpha'^{r+1} + b_n \alpha'^{r+2} + \ldots.$$

oder

$$\beta_n = \gamma_n \alpha^{\frac{r}{s}} + a_n \alpha^{\frac{r+1}{s}} + b_n \alpha^{\frac{r+2}{s}} + \ldots.$$

Demnach werden diejenigen der Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_p$, welche durch die Gleichung

$$K_2 = 0$$

näherungsweise bestimmt sind, durch folgende Reihe ausgedrückt:

$$\gamma_n (z - a)^{\frac{r}{s}} + a_n (z - a)^{\frac{r+1}{s}} + b_n (z - a)^{\frac{r+2}{s}} + \ldots,$$

wo der Index n alle ganzen Zahlen von 1 bis p durchlaufen muss. Die hierdurch gewonnenen Formeln sind also gültig, so lange der Punkt Z innerhalb des um den Punkt A beschriebenen Kreises bleibt, dessen Radius der kleinsten von den Längen AA', AA''.... gleich ist.

23. Sollte nun die Gleichung (2), wie in Nr. 20, t Wurzeln gleich h_1, die Gleichung (2') aber nur ungleiche Wurzeln besitzen, so würde sich herausstellen, wenn wir die in dieser Nummer geltenden Bezeichnungen beibehalten, dass diejenigen den Werthen von β' correspondirenden Functionen v, welche der Gleichung

$$K' = 0$$

näherungsweise genügen, ebenfalls für $\alpha'' = 0$ endliche, ungleiche Werthe haben und nach den Potenzen von α'' entwickelt werden können. Es werden also die correspondirenden Werthe von β durch Reihen von der Form

$$h_1^{\frac{1}{s}} \alpha'^r + \gamma_n \alpha''^{r'} + a_n \alpha''^{r'+1} + b_n \alpha''^{r'+2} + \ldots.$$
$$= h_1^{\frac{1}{s}} \alpha''^{rs'} + \gamma_n \alpha''^{r'} + a_n \alpha''^{r'+1} + b_n \alpha''^{r'+2} + \ldots.$$

und folglich die der Gleichung

$$K' = 0$$

genügenden Functionen unter $u_1, u_2, \ldots, u_p$ durch Reihen von der Form

$$h_1^{\frac{1}{s}}(z - a)^{\frac{rs'}{ss'}} + \gamma_n (z-a)^{\frac{r'}{ss'}} + \mathfrak{a}_n (z-a)^{\frac{r'+1}{ss'}} + \mathfrak{b}_n (z-a)^{\frac{r'+2}{ss'}} + \ldots$$

ausgedrückt.

Falls die Gleichung (2′) selbst gleiche Wurzeln hätte, so würde man durch weitere Ausführung dieser Methode zuletzt zu einer den Gleichungen (2) und (2′) analogen Gleichung gelangen, die keine vielfachen Wurzeln mehr besitzt. Man wird auf diese Weise für alle Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_p$ Reihenentwickelungen finden, welche nach den gebrochenen Potenzen von $z - a$ fortschreiten und gültig sind, so lange der Punkt Z innerhalb eines um den Punkt A beschriebenen Kreises bleibt, dessen Radius kleiner ist, als die kürzeste der Längen AA', AA'', ...

Wir sehen also, dass die Function u_n, welche einem cyklischen Systeme von μ Termen um den Punkt A angehört, immer innerhalb der eben angegebenen Grenzen in eine convergente, nach den ganzen Potenzen von $(z-a)^{\frac{1}{\mu}}$ fortschreitende Reihe entwickelt werden kann, oder mit andern Worten, dass der Nenner der gebrochenen Exponenten von $z - a$, welche diese Entwickelung enthält, der Anzahl der Umläufe gleich ist, die der Punkt Z auf einer unendlich kleinen geschlossenen Curve um den Punkt A vollbringen muss, damit die Function u_n ihren Anfangswerth wieder annimmt. Es mag beiläufig bemerkt werden, dass man sich bei der Beschränkung auf die vorhin dargelegte Berechnungsweise jenes Nenners, dann auch der Methode der unbestimmten Coefficienten bei den in Rede stehenden Reihen bedienen kann.

24. Um diesen Gang deutlicher hervortreten zu lassen, wollen wir einige Beispiele ausführlicher behandeln; wir wählen zuerst die binomische Gleichung

$$u^m - (z-a)(z-a')(z-a'')\ldots = 0,$$

wo die Grössen $a, a', a'', \ldots$ sämmtlich ungleich sein sollen.

Da alle hieraus entspringenden Werthe von u für $z=a$ gleich Null sind, und ferner die Ableitung $\frac{\partial f(u,z)}{\partial z}$ für $u=0$, $z=a$ nicht verschwindet, sondern sich auf die Grösse $-(a-a')(a-a'')\ldots$ reducirt, so erblicken wir hierin den Fall von Nr. 18 und schliessen demnach, dass die m Werthe von u nur ein cyklisches System um den Punkt A bilden und durch convergente, nach den ganzen Potenzen von $(z-a)^{\frac{1}{m}}$ aufsteigende Reihen dargestellt werden können, so lange der Punkt Z innerhalb eines Kreises bleibt, dessen Mittelpunkt A, und dessen Radius die kleinste der Längen AA', AA'', ... ist.

25. Als zweites Beispiel diene die Gleichung

$$u^m-(z-a)^l(z-a')^{l'}(z-a'')^{l''}\ldots, = 0,$$

wo die Grössen a, a', a'',.... wiederum sämmtlich ungleich sein sollen und der Exponent l grösser als Eins ist. Dass hier die m Werthe von u für $z=a$ sämmtlich Null sind und ferner die Ableitung $\frac{\partial f(u,z)}{\partial z}$ für $z=a$ verschwindet, ist charakteristisch für den Fall von Nr. 19. Setzt man also

$$z=a+\alpha,\ u=\beta,$$

so verwandelt sich die gegebene Gleichung in

$$\beta^m-\alpha^l(a-a'+\alpha)^{l'}(a-a''+\alpha)^{l''}\ldots = 0,$$

mithin ist das Polynom Δ von Nr. 19 bloss $\beta^m-\mathrm{B}\alpha^l$, wo der Kürze wegen

$$(a-a')^{l'}(a-a'')^{l''}\ldots, = \mathrm{B}$$

gesetzt worden, und folglich reduciren sich die Klassen K_1, K_2,.... auf die eine Klasse $\beta^m-\mathrm{B}\alpha^l$; ferner geht hier, wenn φ den grössten gemeinschaftlichen Factor von m und l, ausserdem s den Quotienten $\frac{m}{\varphi}$ bezeichnet, die Gleichung (2) derselben Nummer über in:

$$x^\varphi-\mathrm{B}=0.$$

Da diese keine vielfachen Wurzeln besitzt, so folgt, dass die m Werthe von u sich in φ cyklische Systeme von je s Termen

um den Punkt A theilen und nach den ganzen Potenzen von $(z-a)^{\frac{1}{s}}$ entwickelt werden können, so lange der Punkt Z innerhalb eines wie früher bestimmten Kreises bleibt.

26. Wir wollen drittens die Gleichung

$$u^3 - u + z = 0,$$

betrachten, welche für $z = +\frac{2}{3\sqrt{3}}$ eine doppelte Wurzel gleich $+\frac{1}{\sqrt{3}}$ und eine einfache Wurzel gleich $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ besitzt; es bezeichne hier A den $z = +\frac{2}{3\sqrt{3}}$ entsprechenden Punkt, ferner C den unendlich nahe liegenden Ausgangsort von Z, und u_1, u_2, u_3 seien drei der gegebenen Gleichung genügende Functionen, von denen die zwei ersten unendlich wenig von $+\frac{1}{\sqrt{3}}$ abweichende Werthe haben, während der Anfangswerth der dritten unendlich wenig von $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ verschieden ist. Sobald nun Z den Punkt A auf der unendlich kleinen Curve $CLMC$ (Fig. 9) umkreiset und nach C zurückkehrt, nimmt die Function u_3 zufolge Nr. 7 ihren Anfangswerth wieder an, während sich in Betreff der beiden andern Functionen u_1 und u_2, weil die Ableitung $\frac{\partial f(u,z)}{\partial z}$ den Werth $+1$ erhält, der Fall von Nr. 18 darbietet, nämlich eine cyklische Vertauschung der Art, dass jede nach vollbrachtem Umlauf von Z in den Anfangswerth der andern übergeht.

Demnach lassen sich diese beiden Functionen (Nr. 21) nach den ganzen Potenzen von $\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$ in Reihen entwickeln; wir setzen zu diesem Zwecke, der oben angegebenen Methode folgend,

$$z = \frac{2}{3\sqrt{3}} + \alpha, \quad u = \frac{1}{\sqrt{3}} + \beta$$

und erhalten dann

$$\sqrt{3}\,\beta^2 + \beta^3 + \alpha = 0$$

oder, $\alpha = \alpha'^2$, $\beta = \alpha' v$ gesetzt,

$$\sqrt{3}\,v^2 + 1 + \alpha' v^3 = 0.$$

Sind nun v_1 und v_2 diejenigen Werthe von v, welche sich für $\alpha' = 0$ bezüglich auf die endlichen Grössen $+\frac{i}{\sqrt[4]{3}}$ und $-\frac{i}{\sqrt[4]{3}}$ reduciren, so ergibt sich die nach den ganzen Potenzen von α' aufsteigende Entwickelung von v_1, wenn wir in jener Gleichung zuerst

$$v = +\frac{i}{\sqrt[4]{3}} + A\alpha' + B\alpha'^2 + C\alpha'^3 + \ldots.$$

und dann die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von α' gleich Null setzen, um zugleich die Werthe der Coefficienten A, B, C,.... zu erhalten. Wir finden nämlich

$$v_1 = +\frac{i}{\sqrt[4]{3}} + \tfrac{1}{6}\alpha' - \frac{5i}{24(\sqrt[4]{3})^3}\alpha'^2 - \frac{1}{9\sqrt{3}}\alpha'^3 + \frac{77i}{1152\sqrt[4]{3}}\alpha'^4 + \frac{7}{162}\alpha'^5 - \ldots,$$

woraus durch Aenderung des Vorzeichens von i die Reihe für die Function v_2 abgeleitet werden kann. Somit ist

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{i}{\sqrt[4]{3}}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{6}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right) - \frac{5i}{24(\sqrt[4]{3})^3}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$- \frac{1}{9\sqrt{3}}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{77i}{1152\sqrt[4]{3}}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{162}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^3 - \ldots,$$

und hieraus gewinnen wir durch Aenderung des Vorzeichens von i die Reihe für u_2.

Da übrigens die gegebene Gleichung nur für die Werthe $z = +\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $z = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ vielfache Wurzeln besitzt, so ist die gefundene Reihe gültig, so lange die Norm von $z - \frac{2}{3\sqrt{3}}$ kleiner ist, als die Differenz jener beiden Werthe, d. h. $\frac{4}{3\sqrt{3}}$, oder so lange der Punkt Z innerhalb des um den Punkt A mit dem Radius $\frac{4}{3\sqrt{3}}$ beschriebenen Kreises bleibt.

Auch die Function u_3 lässt sich innerhalb derselben Grenzen nach den ganzen Potenzen von $z - \frac{2}{3\sqrt{3}}$ entwickeln; man findet ohne Mühe

$$u_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} - \tfrac{1}{3}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{9\sqrt{3}}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^2 - \tfrac{7}{81}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^3$$
$$- \frac{10}{81\sqrt{3}}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^4 + \ldots.$$

27. Wir wollen endlich noch folgende Gleichung behandeln:

$$A(u-b)^7 + B(u-b)^5(z-a) + C(u-b)^4(z-a)^4 + D(u-b)^2(z-a)^5$$
$$+ E(u-b)(z-a)^7 + F(z-a)^9 + G(u-b)^8 + H(u-b)^4(z-a)^5$$
$$+ I(z-a)^{10} = 0,$$

wo die Coefficienten A, B, C, D, E, F von Null verschieden sein sollen.

Da sich für $z = a$ sieben Wurzeln gleich b ergeben und der Ausgangsort C von Z dem $z = a$ entsprechenden Punkte A unendlich nahe liegt, so sind es sieben Functionen von z, welche der Gleichung genügen und unendlich wenig von b abweichende Anfangswerthe besitzen. Es fragt sich nun, welche Verwandlungen der Werthe dieser Functionen durch einen Umlauf von Z auf einer unendlich kleinen, um den Punkt A beschriebenen geschlossenen Curve $CLMC$ (Fig. 9) herbeigeführt werden.

Weil hier die Ableitung $\frac{\partial f(u,z)}{\partial z}$ für $z = a$, $u = b$ verschwindet, so setzen wir wie in Nr. 19:

$$z = a + \alpha, \quad u = b + \beta$$

und erhalten dann aus der gegebenen Gleichung:

$$A\beta^7 + B\beta^5\alpha + C\beta^4\alpha^4 + D\beta^2\alpha^5 + E\beta\alpha^7 + F\alpha^9 + G\beta^8 + H\beta^4\alpha^5$$
$$+ I\alpha^{10} = 0;$$

dabei sind in dem Polynom Δ folgende Terme begriffen:

$$A\beta^7 + B\beta^5\alpha + C\beta^4\alpha^4 + D\beta^2\alpha^5 + E\beta\alpha^7 + F\alpha^9,$$

welche den Punkten $M_0, M_1, \ldots, M_5$ bezüglich entsprechen, deren Coordinaten

$$x_0 = 7,\ x_1 = 5,\ x_2 = 4,\ x_3 = 2,\ x_4 = 1,\ x_5 = 0,$$
$$y_0 = 0,\ y_1 = 1,\ y_2 = 4,\ y_3 = \quad,\ y_4 = 7,\ y_5 = 0$$

sind. Da nun die Linie M_0O, wie sich zeigt, bei der Drehung um den Punkt M_0 in solchem Sinne, dass dieselbe immer den positiven

Theil der y-Axe schneidet; zuerst dem Punkte M_1, sodann bei der Drehung um M_1 zuerst dem Punkte M_3 und endlich bei der Drehung um M_3 den Punkten M_4 und M_5 zu gleicher Zeit begegnet; so ergeben sich folgende drei Klassen:

$$K_1 = \mathrm{A}\beta^7 + \mathrm{B}\beta^5\alpha,$$
$$K_2 = \mathrm{B}\beta^5\alpha + \mathrm{D}\beta^2\alpha^5,$$
$$K_3 = \mathrm{D}\beta^2\alpha^5 + \mathrm{E}\beta\alpha^7 + \mathrm{F}\alpha^9.$$

Für die erste hat man also

$$s = 2, \quad \varphi = 1,$$

daher an Stelle der Gleichung (2) in Nr. 19:

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B} = 0,$$

und folglich entsprechen dieser Klasse zwei Functionen u von z, welche ein cyklisches System um den Punkt A bilden und innerhalb gewisser Grenzen in convergente, nach den ganzen Potenzen von $(z-a)^{\frac{1}{2}}$ aufsteigende Reihen entwickelt werden können.

Für die zweite Klasse ist

$$s = 3, \quad \varphi = 1,$$

also gilt an Stelle der Gleichung (2) folgende:

$$\mathrm{B}x + \mathrm{D} = 0,$$

demnach entspricht dieser Klasse ein cyklisches System von drei Functionen, deren jede sich nach den ganzen Potenzen von $(z-a)^{\frac{1}{3}}$ entwickeln lässt.

Für die dritte Klasse hat man

$$s = 1, \quad \varphi = 2,$$

mithin an Stelle der Gleichung (2):

$$\mathrm{D}x^2 + \mathrm{E}x + \mathrm{F} = 0.$$

Nehmen wir zunächst an, dass diese Gleichung nur ungleiche Wurzeln besitzt, so entsprechen dieser Klasse zwei cyklische Systeme von je einem Term, d. h. zwei Functionen von z, deren jede nach einem Umlauf von Z ihren eignen Anfangswerth wieder erhält und somit nach den ganzen Potenzen von $z-a$ entwickelt werden kann. Nehmen wir dafür an, dass die Wurzeln der Glei-

chung (2) zusammenfallen, also die simultanen Gleichungen:

$$Dh^2 + Eh + F = 0 \text{ und } 2Dh + E = 0$$

so begegnen wir dem Falle in Nr. 20. Weil alsdann

$$r = 2, \; s = 1$$

ist, substituiren wir in der zwischen α und β stattfindenden Gleichung

$$\alpha = \alpha', \; \beta = h\alpha'^2 + \beta';$$

zuvor bringen wir nämlich dieselbe in die Form

$$\alpha^5(D\beta^2 + E\beta\alpha^2 + F\alpha^4) + A\beta^7 + B\beta^5\alpha + C\beta^4\alpha^4$$
$$+ G\beta^8 + H\beta^4\alpha^5 + I\alpha^{10} = 0$$

und erhalten dann:

$$D\beta'^2\alpha^5 = A(h^7\alpha^{14} + \ldots) + B(h^5\alpha^{11} + \ldots) + C(h^4\alpha^{12} + \ldots)$$
$$+ G(h^8\alpha^{16} + \ldots) + H(h^4\alpha^{13} + \ldots) + I\alpha^{10} = 0,$$

wo α statt α' geblieben ist und ausserdem, wofern die Ordnung von β' die von α^2 übersteigt, die vernachlässigten Terme in jeder Parenthese von höherer Ordnung sind, als der beibehaltene Term. Wir sehen, dass sich die Klassen K' nur auf die eine

$$D\beta'^2\alpha^5 + I\alpha^{15}$$

reduciren, wo I nicht Null ist; ferner, da hier

$$r' = 5, \; s' = 2, \; \varphi' = 1$$

ist, mithin an Stelle der Gleichung (2') die Gleichung ersten Grades

$$Dx' + I = 0$$

eintritt, wo von gleichen Wurzeln nicht die Rede sein kann, und da überdiess

$$ss' = 2$$

ist, dass die beiden der Klasse K_2 entsprechenden Werthe von u nur ein cyklisches System bilden und nach den ganzen Potenzen von $(z - a)^{\frac{1}{2}}$ entwickelt werden können. Wäre dagegen der Coefficient I gleich Null, so würde sich die Klasse K' in

$$D\beta'^2\alpha^5 + Bh^5\alpha^{11}$$

verwandeln, und ferner hätte man

$$r' = 3, \; s' = 1, \; \varphi' = 2,$$

also an Stelle der Gleichung (2'):

$$Dx'^2 + Bh^5 = 0$$

Weil hier die Wurzeln ungleich sind und das Product s_0' gleich Eins ist, so muss offenbar jeder der Klasse K_2 entsprechende Werth von u im gegenwärtigen Falle nach einem Umlauf von Z seinen eignen Anfangswerth wieder erhalten und sich alsdann in eine nach den ganzen Potenzen von $z-a$ aufsteigende Reihe entwickeln lassen.

29. An die bisherigen Untersuchungen über die Vertauschungen der Werthe der Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_p$, welche durch einen Umlauf des Punktes Z auf einer unendlich kleinen um den Punkt A beschriebenen Curve hervorgerufen werden, schliesst sich die Betrachtung eines neuen Falles.

Es sei der Ausgangsort von Z der Punkt C, welcher einem beliebigen Werthe c von z entspricht, für den jedoch die Gleichung

$$f(u,c) = 0$$

keine vielfachen Wurzeln besitzt; ferner seien wie immer A, A', $A'', \ldots$ die den Werthen $a, a', a'', \ldots$ von z entsprechenden Punkte, für welche die Gleichung

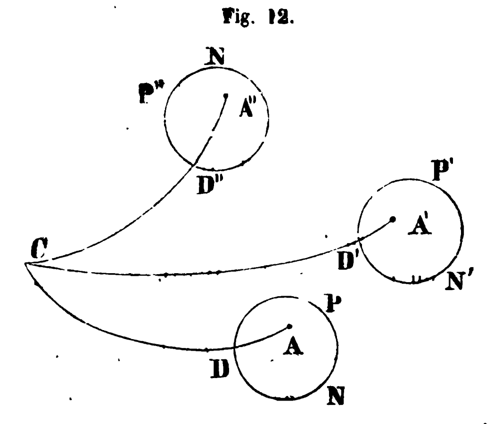
$$f(u,z) = 0$$

vielfache Wurzeln liefert, und zwar mag die Gleichung

$$f(u,a) = 0$$

p Wurzeln gleich b besitzen. Denken wir uns jetzt den Punkt A mit C durch eine zwar beliebige Curve CDA (Fig. 12) verbunden,

Fig. 12.



welche indessen durch keinen der Punkte $A, A', A'', \ldots$ hindurchgeht; bezeichnen wir nun mit $u_1, u_2, \ldots, u_p$ diejenigen der Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

genügenden Functionen von z, welche in A den gemeinschaftlichen Werth b erhalten, sobald Z von C aus, wo die Anfangswerthe derselben $b_1, b_2, \ldots, b_p$ sein mögen, den Weg CDA zurückgelegt hat; und legen wir ferner durch einen in unmittelbarer Nähe von A befindlichen Punkt D dieser Curve eine unendlich kleine geschlossene Curve $DNPD$ mit einfachem Umgange um den Punkt A: so soll die aus der Curve CD der unendlich kleinen Curve DNP und schliesslich der Curve DC bestehende Linie den Namen *Elementar-Curve* führen. Es wird also der Punkt Z bei Durchlaufung derselben die Curve CD zweimal, aber in entgegengesetztem Sinne beschreiben.

Um nun zu sehen, wie sich die Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_p$ verhalten, nachdem Z auf einer solchen Curve einen Umlauf gemacht hat, bezeichnen wir zunächst die Werthe derselben, welche Z beim ersten Eintreffen in D herbeiführt, mit $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$. Von hier aus durchläuft der bewegliche Punkt die unendlich kleine Curve $DNPD$, während nun, wie wir bewiesen haben, den Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_p$ die Eigenschaft zu Theil wird, in eine gewisse Anzahl cyklischer Systeme um den Punkt A zu zerfallen. Stellt $u_1, u_2, \ldots, u_n$ eines dieser Systeme vor, so dass die einzelnen Functionen desselben nach einem Umlauf von Z über $DNPD$ bezüglich die Werthe $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n, \beta_1$ erhalten, und vollendet der Punkt Z seinen Lauf auf der Elementar-Curve durch den Uebergang von D nach C; so nimmt die Function u_1, die in D den Werth β_2 besass, in C den Werth b_2 an, weil Z bei umgekehrtem Gange von C nach D den Werth β_2 von u_1 wieder herbeiführen muss. Da auf ähnliche Weise die Functionen $u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n$ in C die Werthe $b_3, \ldots, b_n, b_1$ erhalten, so kommen folglich den Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_p$ für die Elementar-Curve

CDNPDC dieselben Eigenschaften zu, welche für die unendlich kleine Curve *DNPD* nachgewiesen wurden. Da in beiden Fällen sowol die Anzahl der cyklischen Systeme, als auch die Anordnung ihrer Terme, als ferner diese selbst durchaus übereinstimmen, so reicht es zur Auffindung dieser Systeme immer hin, die Näherungswerthe der Functionen $u_1, u_2, \ldots$ für einen von a unendlich wenig abweichenden Werth von z nach der oben gegebenen Methode zu berechnen.

Was die Functionen $u_{p+1}, u_{p+2}, \ldots$ betrifft, deren Werthe für den Punkt A nur einfache Wurzeln der Gleichung

$$f(u,a) = 0$$

sind, so ist aus N. 7 klar, dass eine jede derselben nach einem Umlauf von Z auf der Elementar-Curve *CDNPDC* bloss ihren Anfangswerth wieder annimmt.

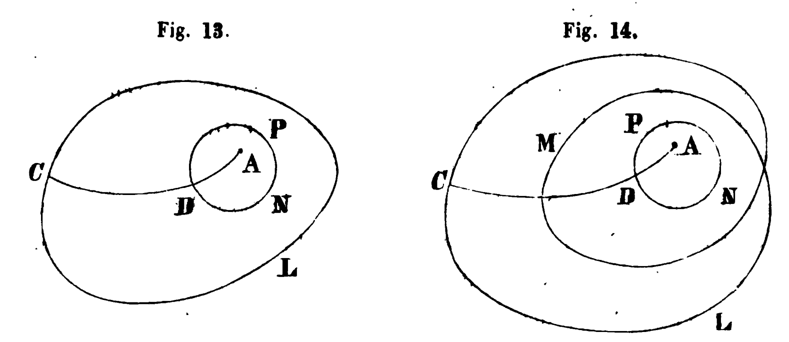
29. Wenn der Punkt Z von C aus eine beliebig gestaltete geschlossene Curve um A beschreibt, welche sich jedoch ohne Ueberschreitung eines der Punkte $A, A', A'', \ldots$ auf die Elementar-Curve *CDNPDC* reduciren lässt; so sind die Functionen $u_1, u_2, \ldots$ zufolge Nr. 6 auf jener Curve genau denselben Vertauschungen unterworfen, wie auf der Elementar-Curve.

30. Denken wir uns zwischen dem Punkte C einerseits und den verschiedenen Punkten $A, A', A'', \ldots$ andererseits beliebige Curven CDA, $CD'A'$, $CD''A'', \ldots$ ausgedehnt (Fig. 12), mit Vorbehalt der Bedingung, dass keine von ihnen durch einen der Punkte $A, A', A'', \ldots$ hindurchgeht; legen wir ferner wieder durch die in unmittelbarer Nähe der Punkte $A, A'\ A'', \ldots$ befindlichen Punkte $D, D', D'', \ldots$ dieser Curven unendlich kleine geschlossene Curven $DNPD$, $D'N'P'D'$, $D''N''P''D'', \ldots$, und vollenden wir dann die Elementar-Curven, welche hier und in der Folge durch die Bezeichnung (A), (A'), $(A''), \ldots$ angedeutet werden sollen; so ist ohne Weiteres ersichtlich, dass jede gegebene, durch den Punkt C gehende geschlossene Curve stets ohne Ueberschreitung eines der Punkte $A, A', A'', \ldots$ und ohne Verlegung des Punktes C durch

Fortschiebung in eine Reihe von Elementar-Curven verwandelt werden kann.

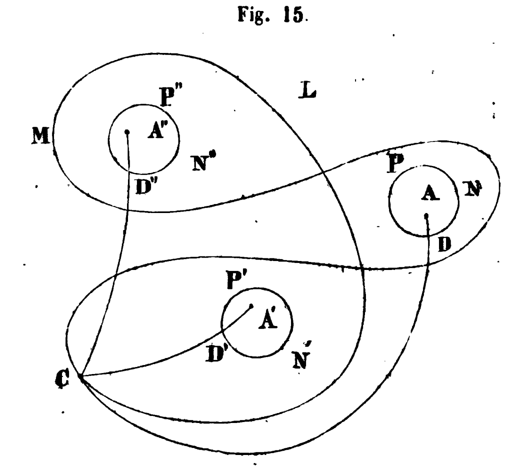
Von der Wahrheit dieser, bei einiger Aufmerksamkeit selbstverständlichen Behauptung werden wir uns sofort überzeugen. Da sich die Curve *CLMC* (Fig. 13.) auf die Elementar-Curve *CDNPDC*, d. h. (*A*), oder die Curve *CLMC* (Fig. 14.) auf die doppelt beschrie-

Fig. 13. Fig. 14.



bene Curve (*A*), oder *CLMC* (Fig. 15.) auf die drei nach einander beschriebenen Elementar-Curven (*A*), (*A'*), (*A''*), oder endlich *CLMC*

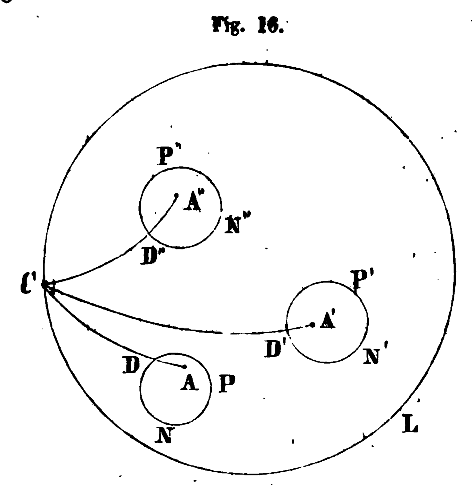
Fig. 15.



(Fig. 16.) auf die Curven-Reihe (*A'*), (*A''*), (*A'*), (*A*), (*A'*) reduciren lässt; so ist, aus diesem Gesichtspunkte betrachtet, jede durch den Punkt *C* gehende geschlossene Curve durch diejenige Reihe

von Elementar-Curven charakterisirt, mit welcher dieselbe zur Coincidenz gebracht werden kann.

Fig. 16.



Weil es jedoch wesentlich ist, dass der Sinn der Bewegung auf jeder Elementar-Curve mit angegeben wird, so wollen wir die Curve (A) durch $(+A)$, oder durch $(-A)$ bezeichnen, je nachdem sich der Punkt Z in directem, oder in umgekehrtem Sinne (Nr. 18) bewegt; gleichwol behalten wir die Bezeichnung (A) in denjenigen Fällen bei, wo es gleichgültig ist, wie der directe Sinn genommen wird. So reducirt sich die Curve $CLMC$ (Fig. 13.) auf $(+A)$, oder auf $(-A)$, je nachdem der Punkt Z im Sinne von $CLMC$, oder im Sinne von $CMLC$ fortgeht; desgleichen die Curve $CLMC$ (Fig. 16.) auf die Reihe $(+A')$, $(+A'')$, $(-A')$, $(-A)$, $(+A')$, wenn dieselbe im Sinne von $CLMC$, dagegen auf die Reihe $(-A')$ $(+A)$, $(+A')$, $(-A'')$, $(-A')$, wenn jene im entgegengesetzten Sinne durchlaufen wird. (Es mag hierbei bemerkt werden, dass man um die zweite Reihe aus der ersten abzuleiten, in allen Fällen nur die Ordnung und die Vorzeichen der Terme zugleich umzukehren braucht.)

Wenn nun eine durch den Punkt C gehende geschlossene Curve, welche in bestimmtem Sinne durchlaufen wird, wie übri-

gens auch ihre Gestalt beschaffen sein mag*), durch diejenige Reihe von Elementar-Curven repräsentirt wird, mit welcher dieselbe durch Verschiebung zur Coincidenz gebracht werden kann; so soll diese Reihe, deren Terme mit den auf die eben angegebene Weise entsprechenden Vorzeichen versehen sind, die *Charakteristik der Curve* heissen. Demnach haben die Curven *CLMC* der Figuren 13, 14, 15, 16, und zwar im Sinne von *CLMC* durchlaufen, bezüglich folgende Charakteristiken:

$$(+A),\ (+A)(+A),\ (+A)(+A')(+A''),$$
$$(+A')(+A'')(-A')(-A)(+A');$$

dagegen im entgegengesetzten Sinne durchlaufen, folgende Charakteristiken:

$$(-A),\ (-A)(-A),\ (-A'')(-A')(-A),$$
$$(-A')(+A)(+A')(-A'')(-A').$$

Bezeichnen wir die Charakteristik einer geschlossenen Curve, welche sich ohne Ueberschreitung eines der Punkte $A, A', A'', \ldots.$ auf einen blossen Punkt C reduciren lässt, mit (0), so ist klar, dass man eben so wol beliebig viele Terme (0) in der Charakteristik einer Curve an beliebigen Stellen einschalten, als auch unterdrücken darf.

Es ist leicht einzusehen, dass eine bestimmte Curve, während die Punkte $A, A', A'', \ldots.$ wie auch C und die Curven *CDA*, *CD'A'* *CD''A''*,.... unverändert bleiben, nur eine Charakteristik zulässt (abgesehen von den Modificationen, welche die jederzeit unterdrückbaren Terme (0) erleiden können); ferner dass zwei Curven mit derselben Charakteristik immer mit einander zur Coincidenz gebracht werden können, ohne Ueberschreitung eines der Punkte $A, A', A'', \ldots.$; dass sich hingegen zwei im einen oder andern Sinne durchlaufene Curven mit verschiedenen Charakteristiken nicht auf einander reduciren lassen; dass endlich, wenn die

---

*) Es bleibt immer der Fall ausgeschlossen, dass diese Curve durch einen der Punkte $A, A', A'', \ldots.$ hindurchgeht.

Curven CDA, $CD'A'$, $CD''A''$,.... eine Gestaltänderung erleiden, die Charakteristik einer gegebenen Curve dieselbe bleibt, so lange sich diese Aenderung nicht über einen der Punkte A, A', A'',.... hinaus erstreckt.

31. Wenden wir nun den in Nr. 6 aufgestellten Satz hierauf an, so ergibt sich, dass im Ausgangspunkte C immer nur ein und zwar derselbe Werth einer, durch die Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

und durch einen unter den Wurzeln der Gleichung

$$f(u,c) = 0$$

gewählten Anfangswerth b_1, definirten Function u_1 von z wiederkehrt, so oft der Punkt Z auf geschlossenen Curven, welche eine und dieselbe Charakteristik besitzen, oder auf der durch diese selbst dargestellten Reihe von Elementar-Curven nach dem Punkte C zurückkehrt.

Somit kann der Werth jeder der m Functionen u_1, u_2,...., u_m von z, welche durch die Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

und bezüglich durch die aus der Gleichung

$$f(u,c) = 0$$

entspringenden m Anfangswerthe b_1, b_2,...., b_m bestimmt sind, für den Punkt C gefunden werden, wenn die Charakteristik der von Z durchlaufenen geschlossenen Curve gegeben ist. Man ersetze nämlich die gegebene Curve durch die der Charakteristik entsprechende Reihe der Elementar-Curven und bestimme nun nach Nr. 28 den durch einen Umlauf des Punktes Z auf der ersten Elementar-Curve herbeigeführten Werth b_p von u_n, wozu schon die Kenntniss derjenigen Function hinreicht, welche der Function u_n in einem, auf den umkreiseten Punkt A, oder A',.... bezogenen cyklischen Systeme vorangeht, oder folgt; eben so ermittle man den Werth b_q, welchen die Functionen u_p nach Vollendung eines Umlaufs von Z auf der zweiten Elementar-Curve erhält, d. h. offenbar, welchen u_n nach Durchlaufung der beiden ersten Elemen-

tar-Curven annimmt; desgleichen suche man den Werth b_r, welchen u_q nach einem Umlauf von Z auf der dritten Elementar-Curve erhält, d. h. welcher u_n nach Durchlaufung der drei ersten Elementar-Curven zukommt. Fährt man so fort, so gelangt man schliesslich zu dem Werthe, welchen u_n erhält, sobald der Punkt Z seinen Umlauf über alle Elementar-Curven der Charakteristik, oder auch über die gegebene Curve selbst vollendet.

32. Als Beispiel diene uns wieder die Gleichung von Nr. 26:

$$u^3 - u + z = 0.$$

Da für zwei $z = +\frac{2}{3\sqrt{3}}$ und $z = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ entsprechende Punkte der x-Axe A und A', welche zu beiden Seiten des Anfangspunktes der Coordinaten in der Entfernung $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ liegen, zwei Wurzeln der Gleichung zusammenfallen, so wählen wir den Anfangspunkt zum Ausgangsorte C des Punktes Z, wo die drei der gegebenen Gleichung genügenden Functionen u_1, u_2, u_3 bezüglich die Anfangswerthe 0, +1, —1 besitzen und reell bleiben, wenn Z von C nach A auf der geraden Linie CA fortgeht; der Gleichung

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{1 - 3u^2}$$

gemäss wächst die Function u_1 an, während u_2 und u_3 abnehmen, bis für den Punkt A selbst

$$u_1 = u_2$$

geworden ist. Behalten wir die geraden Linien CA und CA' als die eigentlich messbaren (endlichen) Bestandtheile der Elementar-Curven (A) und (A') bei (Nr. 28), so bilden diese beiden Functionen u_1, u_2 nach Nr. 26 ein cyklisches System um jenen Punkt, indem jede nach einem Umlauf von Z auf der Elementar-Curve ($\pm A$) den Anfangswerth der andern annimmt, während u_3 den eignen Anfangswerth wieder erhält. Eben so ergibt sich, dass jede der Functionen u_1, u_3 nach einem Umlauf von Z auf der Elementar-Curve ($\pm A'$) den Anfangswerth der andern annimmt, während

u_2 den eignen Anfangswerth wieder erhält, so dass man sofort den Werth angeben kann, welchen eine dieser Functionen nach einem Umlauf von Z auf einer geschlossenen Curve erhält, wenn die Charakteristik dieser bekannt ist.

Wir wollen z. B. den Werth von u_1 aufsuchen, welcher durch einen Umlauf von Z auf der Curve

$$(\pm A)\,(\pm A')\,(\pm A)\,(\pm A)\,(\pm A)\,(\pm A')$$

herbeigeführt wird, wo die Wahl des Plus- oder Minuszeichens für die Charakteristiken der einzelnen Elementar-Curven, wie in allen Fällen ein- oder zweigliedriger Systeme, gleichgültig ist. Der Anfangswerth 0 von u_1 geht nämlich nach Durchlaufung der Curve $(\pm A)$ in den Anfangswerth $+1$ von u_2 über, welchen die Function nach einem Umlauf über die Curve $(\pm A')$ wieder annimmt; sodann führen die drei Umläufe auf der Curve $(\pm A)$ nach einander die Werthe $0, +1, 0$ herbei, und endlich bringt der Umlauf von Z auf der Curve $(\pm A')$ den Werth -1 der Function hervor.

23. Wir wollen ferner die Gleichung

$$u^3 - (z-a)\,(z-a')^2 = 0$$

betrachten, deren Wurzeln u_1, u_2, u_3 für $z = a$ und für $z = a'$ zusammenfallen, und für den Anfangspunkt der Coordinaten $z = 0$, welcher zugleich als Ausgangsort von Z dienen soll, folgende Anfangswerthe besitzen:

$$g,\; g e^{\frac{2\pi i}{3}},\; g e^{\frac{4\pi i}{3}},$$

wo einer der drei Werthe der Wurzelgrösse $\sqrt[3]{-aa'^2}$ mit g bezeichnet ist. Man erkennt ohne Mühe, dass diese Functionen u_1, u_2, u_3 ein cyklisches System um den Punkt A, und in der Anordnung u_1, u_3, u_2 ein solches um den Punkt A' bilden.

Um nun den Endwerth von u_1 nach einem Umlauf von Z auf einer geschlossenen Curve zu erhalten, deren Charakteristik etwa

$$(-A)\,(+A')\,(+A)\,(+A')\,(-A)\,(-A)\,(-A')$$

sein mag, brauchen wir nur folgende Reihe der im Anfangspunkte herbeigeführten Werthe von u_1, wo Z die durch die Charakteri-

stik bezeichneten Elementar-Curven nach einander zurückgelegt hat, aufzustellen:

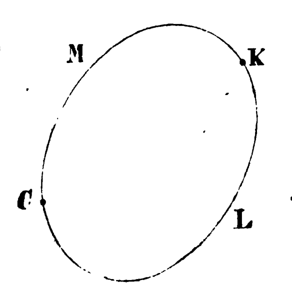
$$ge^{\frac{4\pi_i}{3}},\ ge^{\frac{2\pi_i}{3}},\ ge^{\frac{4\pi_i}{3}},\ ge^{\frac{2\pi_i}{3}},\ g,\ ge^{\frac{4\pi_i}{3}},\ g.$$

Demnach erlangt die Function u_1 ihren ursprünglichen Werth g wieder.

34. Nachdem wir gezeigt haben, wie sich die Function u_1 verhält, wenn der Punkt Z nach Durchlaufung einer geschlossenen Curve zu seinem anfänglichen Orte zurückkehrt; haben wir noch einen Blick auf diejenigen Werthe jener Function zu werfen, welche beim Uebergange des Punktes Z von C nach einem zweiten Punkte K auf verschiedenen Curven, mit Ausschluss der durch einen der Punkte $A, A', A'', \ldots$ hindurchgehenden herbeigeführt werden.

Bezeichnen wir die Anfangswerthe der Functionen $u_1, u_2, \ldots u_m$ wie immer mit $b_1, b_2, \ldots, b_m$ und die beim Uebergange des Punktes Z von C nach K auf einer bestimmten Curve CMK (Fig. 17) herbeigeführten Werthe derselben mit $h_1, h_2, \ldots, h_m$; so handelt es sich um die Ermittelung derjenigen Werthe, welche jene Functionen beim Uebergange des Punktes Z von C nach K auf irgend einer andern Curve CLK erhalten.

Fig. 17.



Beachten wir nämlich, dass die beiden Curven CLK und CMK zusammengenommen eine geschlossene Curve $CLMC$ ausmachen, deren Charakteristik (Γ) bekannt ist, sobald jene Curven gegeben sind; ferner dass die Function u_1 im Punkte K beständig denselben Werth erhält, mag nun der Punkt Z den Weg CLK, oder zuerst die geschlossene Curve $CLMC$ und dann die Curve CMK zurücklegen, weil diese Zusammensetzung mit jenem Wege zur Coincidenz gebracht werden kann, ohne dass einer der Punkte $A, A', A'', \ldots$ überschritten

wird (denn es darf der Theil $KMCMK$ als eine geschlossene Curve angesehen werden, welche keinen dieser Punkte umgibt, sich folglich auf den blossen Punkt K reduciren lässt); so ist klar, dass eine Function u_i, welche nach einem Umlaufe von Z auf der geschlossenen Curve $CLMC$ den (nach Nr. 31 bestimmbaren) Anfangswerth b_j der Function u_j erhält, nunmehr beim Fortgange des Punktes Z nach K, also nach Durchlaufung der Curve $CLMC+CMK$, oder auch der Curve CLK selbst den Werth h_j annimmt.

Da aus diesem Gesichtspunkte die Bezeichnung $(\Gamma) + CMK$ zur symbolischen Darstellung der Curve CLK hinreichend erscheint, so werden wir uns derselben in der Folge unter dem Namen Charakteristik bedienen. Sind nun die Werthe $h_1, h_2, \ldots, h_m$, welche die Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ beim Uebergange des Punktes Z nach K auf der Curve CMK erhalten, durch das Verfahren von Nr. 16 bestimmt, so braucht die Berechnung derselben für eine neue Curve $(\Gamma) + CMK$ nicht wiederholt zu werden; es genügt schon, die Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ in cyklische Systeme für jeden der Punkte $A, A', A'', \ldots$ abzutheilen, um dann unmittelbar angeben zu können, welcher der Grössen $h_1, h_2, \ldots, h_m$ die Function u_i am Ende der Bewegung von Z auf der Curve $(\Gamma) + CMK$ gleich wird.

Wählen wir z. B. wieder die Gleichung

$$u^3 - u + z = 0,$$

wo die Functionen u_1, u_2, u_3 wie in Nr. 32 definirt sind, und bezeichnen mit h_1, h_2, h_3 die Werthe, welche dieselben beim Uebergange des Punktes Z von C nach K auf einer bestimmten Curve CMK erhalten, so bedarf es zur Ermittelung derjenigen Werthe, welche unsere drei Functionen beim Uebergange des Punktes Z von C nach K auf der Curve $(\pm A)(\pm A') + CMK$ erhalten, nur der Bemerkung, dass u_1, u_2, u_3 nach einem Umlauf von Z auf der geschlossenen Curve $(\pm A)(\pm A')$ bezüglich die Anfangswerthe von u_2, u_3, u_1 annehmen, dass folglich h_2, h_3, h_1 die verlangten Werthe sind.

35. Der Gang der Function u lässt sich anschaulicher darstellen, wenn wir uns statt dieser einen Punkt U denken, dessen Abscisse und Ordinate bezüglich der reelle Theil und der Coefficient von i in dem Ausdrucke von u sind, so dass U eine vollständig bestimmte Curve beschreibt, während Z continuirlich fortgeht, ohne jedoch einen der Punkte $A, A', A'', \ldots$ zu überschreiten.

Durchläuft nun Z von C bis K mehrere verschiedene Curven, so werden der Function u verschiedene Werthe zukommen, und zwar überhaupt für $z = k$ die Werthe $h_1, h_2, \ldots, h_m$, unter denen sich immer derjenige, welcher durch Fortbewegung von Z herbeigeführt wird, nach Massgabe der durchlaufenen Curve unterscheiden lässt. Es folgt hieraus, dass der Punkt U alsdann auf verschiedenen Curven nach verschiedenen Orten gelangen kann, und zwar überhaupt nach den, den Grössen $h_1, h_2, \ldots, h_m$ entsprechenden Punkten $H_1, H_2, \ldots, H_m$, unter denen sich wieder derjenige, mit welchem U zusammenfällt, angeben lässt, sobald der von Z verfolgte Weg bekannt ist.

Durchläuft z. B. Z eine geschlossene Curve bis zum Ausgangspunkte C zurück, so sind die beiden Fälle möglich, dass die Function u ihren Anfangswerth wieder annimmt, oder nicht; in jenem Falle beschreibt der Punkt U selbst eine geschlossene Curve, während er in diesem nicht wieder zu seinem anfänglichen Orte zurückkehrt.

36. Wir haben bisher den Fall untersucht, dass Z keinen der Punkte durchschreitet, für welche die Function u als eine vielfache Wurzel der Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

erscheint, und wollen nun einen Blick auf den Fall thun, wenn Z durch einen Punkt A geht, für den die p Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_p$ einen und denselben Werth b besitzen. Wenngleich sich für diese Functionen eben sowol nachdem Z den Punkt A überschritten hat, wie vor dem, aus der Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

p ungleiche, der Grösse b sehr nahe liegende Werthe ergeben; so ist kein Grund vorhanden, warum einer dieser Werthe nachher einer der wieder auseinander tretenden Functionen $u_1, u_2, \ldots u_p$ von z vorzugsweise angehören sollte, und es bleibt daher ganz und gar unentschieden, welche dieser Functionen etwa als die Fortsetzung einer besonderen Function u_1 anzusehen sei.

Um diese Art von Unbestimmtheit deutlicher hervortreten zu lassen, betrachten wir folgendes Beispiel. Wenn wir Z von C aus im directen Sinne über einen durch den Punkt A gehenden Kreis $CLAMC$ (Fig. 1**) fortführen, während die Functionen u_1 und u_2 für jenen Punkt den gemeinschaftlichen Werth b besitzen, ausserdem aber nirgends innerhalb oder auf dem Umfange des Kreises gleich werden, so dass also die Relationen

$$f(u,z) = 0, \quad \frac{\partial f(u,z)}{\partial u} = 0$$

aber nur für $z = a$, $u = b$ gleichzeitig stattfinden, die Ableitungen $\frac{\partial^2 f(u,z)}{\partial u^2}$, $\frac{\partial f(u,z)}{\partial z}$ für jene Werthe von z und u sich etwa auf die von Null verschiedenen Grössen A und B reduciren; wenn wir dann

$$z = a + \varrho e^{\tau i}, \quad u_1 = b + \beta_1, \quad u_2 = b + \beta_2$$

setzen, wo die Grössen β_1 und β_2 mit ϱ gleichzeitig verschwinden und für kleine Werthe von ϱ mit den beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\mathrm{A}\beta^2 + \mathrm{B}\varrho e^{\tau i} = 0$$

oder

$$\beta^2 = h\varrho e^{\tau i}$$

für $h = -\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$ übereinstimmen; so ergibt sich:

$$u_1 = b + (h\varrho)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\tau}{2} i}, \quad u_2 = b + (h\varrho)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\tau + 2\pi}{2} i}.$$

Und wenn

$$(h\varrho)^{\frac{1}{2}} = \gamma e^{\delta i},$$

wo γ eine positive Zahl und δ einen reellen Winkel bezeichnet, und dann

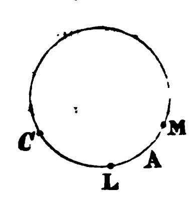
$$\delta + \frac{\tau}{2} = v_1, \quad \delta + \frac{\tau + 2\pi}{2} = v_2$$

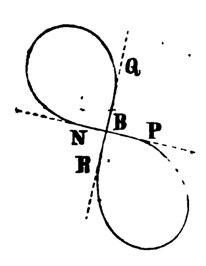
gesetzt wird, so finden wir für die nächste Umgebung des Punktes A näherungsweise

$$u_1 = b + \gamma e^{v_1 i}, \quad u_2 = b + \gamma e^{v_2 i}.$$

Es seien nun L und M zwei zu beiden Seiten und in sehr kleinen Entfernungen von A liegende Punkte des Umfangs $CLMC$ und B der Punkt, welcher dem gemeinschaftlichen Werthe b der beiden Functionen u_1, u_2 entspricht, sobald der Punkt Z nach A gelangt ist. Nimmt Z zuerst den Ort L ein, so besitzen diese Functionen ungleiche Werthe, welche den in der Nähe von B liegenden Punkten N und P entsprechen, und zwar bildet jede der geraden Linien BN und BP gewissermassen die Verlängerung der andern, weil ja

Fig. 18.





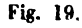
$$v_2 = v_1 + \pi$$

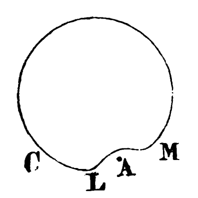
ist; und wenn sich hierauf der Punkt Z bis M fortbewegt hat, so entsprechen den Werthen der beiden Functionen wiederum zwei in unmittelbarer Nähe von B liegende Punkte Q und R, welche ebenfalls von der geraden Linie QBR unmerklich abweichen. Da aber bei diesem Uebergange von L nach M die Grösse τ um $\pm\pi$ geändert wird, so dass jeder der Winkel v_1, v_2 eine Aenderung von $\pm \frac{\pi}{2}$ erleidet, so müssen die sehr kleinen Linien BQ und BR auf BN und BP senkrecht stehen.

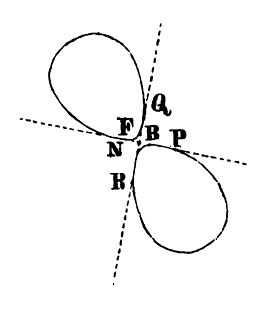
Nehmen wir jetzt an, dass Z hierbei den Punkt A überschreitet, so findet zwischen den Punkten U_1, U_2, welche den Funktionen u_1, u_2 entsprechen und anfänglich in N und P lagen, eine gegenseitige Annäherung, sodann, wenn Z den Ort A geradezu einnimmt, in B selbst die Coincidenz und hierauf wieder nach Q und R hin eine Trennung statt. Wählt man nun für die Func-

tion u_1 den Punkt N und für die Function u_2 den Punkt P, so ist kein Grund vorhanden, warum einer der Punkte Q, R vorzugsweise der einen oder der andern dieser Functionen entsprechen sollte.

Denn verschiebt man den Weg von Z zwischen L und M unendlich wenig, so dass derselbe den Punkt A nicht mehr berührt, so wird entweder der Punkt U_1 von N nach Q und der Punkt U_2 von P nach R, oder der Punkt U_1 von N nach R und der Punkt U_2 von P nach Q fortgehen, je nachdem der Punkt A sich innerhalb oder ausserhalb der geschlossenen Curve $CLMC$ befindet.





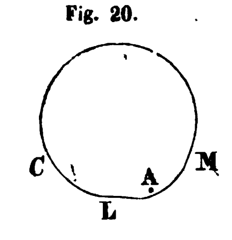


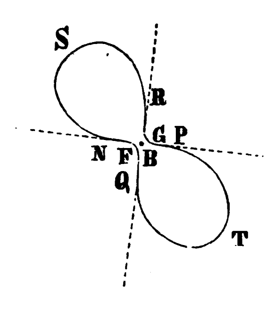
Um dies einzusehen, wollen wir den Punkt A (Fig. 19.) zuerst ausserhalb und zwar in unmittelbarer Nähe der Curve $CLMC$ annehmen; ferner seien L und M zwei dem Punkte A sehr nahe liegende Punkte dieser Curve, und zwar der Art, dass die geraden Linien AL und AM einen Winkel von 180^0 bilden. Sobald nun der Punkt Z von L bis M fortgeht, nimmt τ an der Grenze um π, folglich v_1 und v_2 um $\frac{\pi}{2}$ ab, demnach durchläuft der Punkt U_1 die Curve NFQ und der Punkt U_2 die Curve PGR.

Nehmen wir dagegen den Punkt A (Fig. 20.) innerhalb an, während die Lage der Punkte L und M wie vorhin bleibt, und lassen wir Z von L bis M fortrücken, so wächst der Winkel τ an der Grenze um π, folglich v_1 und v_2 um $\frac{\pi}{2}$ an, alsdann durchläuft U_1 den Weg NFR und U_2 den Weg PGQ.

Aus den Figuren 18, 19 und 20 ist sofort ersichtlich, welche Modificationen die von den Punkten U_1, U_2 beschriebenen Cur-

Fig. 20.





ven erleiden, wenn die Curve *CLMC* bei der Verschiebung den Punkt *A* überschreitet. So lange sie diesen nicht einschliesst, durchlaufen die Punkte U_1, U_2 geschlossene Curven (Fig. 19), nämlich die Wege *SNFQS* und *TPGRT*, welche dem Punkte *B* sehr nahe kommen und in der Nähe desselben allmälig die Schenkel von rechten Scheitelwinkeln ausmachen.

Wenn die Curve *CLMC* den Punkt *A* überschreitet (Fig. 18.), so bilden jene beiden Curven eine einzige, für welche der Punkt *B* sich als ein vielfacher (Doppel-) Punkt darstellt, von dem sich rechtwinkelige Aeste abzweigen; nachdem aber die Punkte U_1 und U_2 auf den Linien *NB*, *PB* nach *B* gelangt sind, steht uns wie gesagt die Annahme frei, welcher von beiden auf der Linie *BQ* fortgehen soll, während der andere die Linie *BR* durchläuft.

Wenn endlich die Curve *CLMC* den Punkt *A* umgibt (Fig. 20), so machen die Wege der Punkte U_1 und U_2 zwei Theile einer und derselben geschlossenen Curve aus, welche in der Nähe von *B* eine Verengung bilden und sich wiederum allmälig zu rechten Scheitelwinkeln gestalten. Sind *S* und *T* die anfänglichen Orte bezüglich von U_1 und U_2, während *Z* auf der Curve *CLMC* einen Umlauf macht, so beschreibt der Punkt U_1 den Bogen *SNFRT* und der Punkt U_2 den Bogen *TPGQS*, und erst nach zwei Umläufen von *Z* nehmen die Punkte U_1, U_2 ihre ursprünglichen Orte *S* und *T* wieder ein.*)

---

*) Sollte die Curve *CLMC* etwa in *A* eine Spitze bilden, wo die beiden Theile derselben den Winkel ϑ einschliessen, so würden die

Was den Fall betrifft, wenn die Curve *CLMC* einen derjenigen Punkte *A* überschreitet, für welchen drei Functionen u_1, u_2, u_3 einen gemeinsamen Werth b besitzen, so ergibt sich eben so leicht das Verhalten der Punkte U_1, U_2. Unter der Voraussetzung nämlich, dass die Ableitungen $\frac{\partial^3 f(u,z)}{\partial u^3}$ und $\frac{\partial f(u,z)}{\partial z}$ für $z = a$, $u = b$ nicht verschwinden, sind die Näherungswerthe jener Functionen für solche Werthe von z, welche in unmittelbarer Nähe von a liegen, folgende:

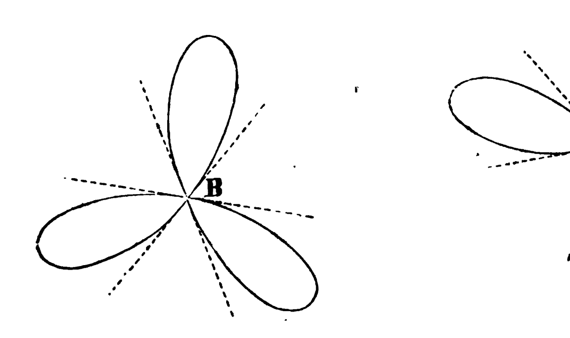
$$u_1 = b + (h\varrho)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\tau}{3}i},$$

$$u_2 = b + (h\varrho)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\tau + 2\pi}{3}i},$$

$$u_3 = b + (h\varrho)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\tau + 4\pi}{3}i}.$$

Hieraus entnehmen wir, nach einer der früheren ähnlichen Betrachtung: falls der Punkt *A* der Curve *CLMC* ausserhalb sehr nahe liegt, wird von jedem der Punkte U_1, U_2, U_3 eine dem Punkte *B* sehr nahe kommende geschlossene Curve beschrieben (Fig. 21); falls jene Curve durch den Punkt *A* hindurchgeht, bilden diese drei Curven eine einzige (Fig. 22), die in *B* einen

Fig. 21. Fig. 22.



---

von den Punkten U_1, U_2 beschriebenen Curven zwar wiederum in einen vielfachen (Doppel-) Punkt besitzen, während jedoch die Aeste unter dem Winkel $\frac{\vartheta}{2}$ von *B* auslaufen.

vielfachen (dreifachen) Punkt besitzt, wo sich drei Aeste unter Winkeln von 60 Graden abzweigen; falls endlich der Punkt A innerhalb jener Curve zu liegen kommt, wird der Punkt B von dieser zusammenhängenden Curve nicht mehr berührt, sondern in der Gestalt der Figur 23 eingeschlossen. Während Z auf der Curve $CLMC$ einen Umlauf macht, beschreibt jeder der Punkte U_1, U_2, U_3 für sich einen Theil der betrachteten Curve der Art, dass die drei Theile die ganze Curve zusammensetzen; erst nach drei Umläufen von Z erhalten diese Punkte wieder ihre anfängliche Lage.

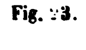
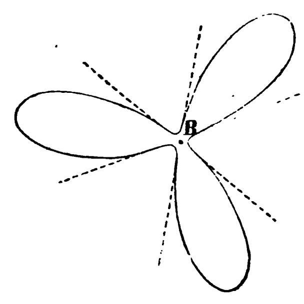


Fig. 23.



37. Wir haben von Nr. 18 ab immer vorausgesetzt, dass der Coefficient der höchsten Potenz von u in dem ganzen Polynom $f(u,z)$ unabhängig von z ist; die oben gegebene Theorie lässt sich eben so leicht auf den Fall ausdehnen, wenn jener Coefficient als eine beliebige ganze Function von z auftritt. Wir wollen zu diesem Zwecke die irreductible Gleichung

$$Nv^m + Pv^{m-1} + Qv^{m-2} + \ldots + Sv + T = 0$$

betrachten, wo N, P, Q ....., T ganze Polynome von z bezeichnen, und, wie es bereits für die Function u geschehen, alle verschiedenen Werthe, welche die Function v annimmt, je nachdem sich der Punkt Z von seinem anfänglichen Orte aus nach einem zweiten Orte K auf dieser oder jener Curve fortbewegt, abgesondert darzustellen suchen.

Dieser Fall kann sofort auf den oben behandelten zurückgeführt werden, wenn wir

$$v = \frac{u}{N}$$

setzen, wodurch sich nämlich die gegebene Gleichung in

$$u^m + Pu^{m-1} + NQu^{m-2} + \ldots + N^{m-2}Su + N^{m-1}T = 0$$

verwandelt, wo der Coefficient von u^m gleich Eins ist. Da hier das Polynom N für jeden Werth von z nur einen Werth hat, so entsprechen den verschiedenen Werthen, welche die Function u zulässt, eben so viele Werthe von v, die in der Formel

$$v = \frac{u}{\mathrm{N}}$$

begriffen sind.

Demnach reducirt sich alles wie früher auf die Bestimmung der Charakteristiken der verschiedenen von C nach K führenden Wege, und zwar ist hierzu immer nur die Construction der Punkte $A, A', A'', \ldots.$ erforderlich, die denjenigen Werthen von z entsprechen, für welche die Gleichung

$$u^m + \mathrm{P}u^{m-1} + \ldots. + \mathrm{N}^{m-1}\mathrm{T} = 0$$

vielfache Wurzeln besitzt. Ungeachtet es sich nämlich, obschon diese Werthe von z im Allgemeinen dieselben bleiben, doch mit denen, für welche N verschwindet, anders verhalten kann, indem die Gleichung in u für diese Werthe $m - 1$ Wurzeln gleich Null liefert, während die Gleichung in v gewöhnlich eine unendlich grosse Wurzel und $m - 1$ endliche und ungleiche Wurzeln gibt; so lassen sich sämmtliche Punkte $A, A', A'', \ldots.$ jederzeit dadurch auffinden, dass man diejenigen Werthe von z, welchen unendlich grosse Wurzeln der Gleichung in v entsprechen, mit denen verbindet, für die zwei Wurzeln dieser Gleichung coincidiren.

28. Wir haben gesehen, dass die der Gleichung

$$u^m + \mathrm{P}u^{m-1} + \mathrm{NQ}u^{m-2} + \ldots. = 0$$

genügenden Functionen $u_1, u_2, \ldots., u_m$ sich in Bezug auf den Punkt A in eine gewisse Anzahl cyklischer Systeme abtheilen; die entsprechenden Functionen

$$v_1 = \frac{u_1}{\mathrm{N}}, \quad v_2 = \frac{u_2}{\mathrm{N}}, \ldots., \quad v_m = \frac{u_m}{\mathrm{N}}$$

bilden offenbar gleich viel correspondirende cyklische Systeme. Wenn wir mit ν den Grad derjenigen Potenz von $z - a$ bezeichnen, durch welche das Polynom N theilbar ist, während auch der ganze Exponent ν gleich Null sein kann, und

$$N = (z-a)^\nu \mathfrak{N}$$

setzen, so ist

$$v_n = \frac{u_n}{(z-a)^\nu \mathfrak{N}},$$

also

$$(z-a)^\nu v_n = \frac{1}{\mathfrak{N}} \cdot u_n,$$

wo v_n eine der Functionen $v_1, v_2, \ldots, v_m$ repräsentirt. So lange nun der Punkt Z innerhalb eines um A beschriebenen Kreises bleibt, dessen Radius der kleinsten von den Längen AA', AA'',.... gleich ist, lässt sich $\frac{1}{\mathfrak{N}}$ in eine convergente, nach den ganzen positiven Potenzen von $z-a$ fortschreitende Reihe entwickeln; ferner haben wir in Nr. 23 gesehen, dass wenn μ die Anzahl der Terme des cyklischen Systems bezeichnet, zu welchen die Function u_n gehört, diese letztere innerhalb derselben Grenzen nach den ganzen positiven Potenzen von $(z-a)^{\frac{1}{\mu}}$ entwickelt werden kann. Multiplicirt man die beiden so aufgestellten Reihen mit einander, so erhält man für $\frac{1}{\mathfrak{N}} \cdot u_n$ die nach den ganzen positiven Potenzen von $(z-a)^{\frac{1}{\mu}}$ fortschreitende Entwickelung:

$$\frac{1}{\mathfrak{N}} \cdot u_n = (z-a)^\nu u_n = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}(z-a)^{\frac{1}{\mu}} + \mathfrak{C}(z-a)^{\frac{2}{\mu}} + \ldots,$$

wo $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ von z unabhängige Coefficienten vorstellen. Somit ist:

$$v_n = \mathfrak{A}(z-a)^{-\nu} + \mathfrak{B}(z-a)^{\frac{1}{\mu}-\nu} + \mathfrak{C}(z-a)^{\frac{2}{\mu}-\nu} + \ldots,$$

die Function v_n lässt sich also wie u_n nach den ganzen Potenzen von $(z-a)^{\frac{1}{\mu}}$ entwickeln; während jedoch die Entwickelung von u_n nur positive Potenzen von $(z-a)^{\frac{1}{\mu}}$ enthält, kann die von v_n mit einer begrenzten Anzahl von negativen Potenzen beginnen.

39. Wir wollen das Gesagte auf die Gleichung

$$(z-a)(z-a')(z-a'')\ldots v^m - 1 = 0$$

anwenden, wo die Grössen $a, a', a'', \ldots$ sämmtlich ungleich sein sollen. Setzen wir

$$v = \frac{u}{(z-a)(-a')(z-a'')\ldots},$$

so ergibt sich

$$u^m - (z-a)^{m-1}(z-a')^{m-1}(z-a'')^{m-1}\ldots = 0;$$

die Punkte $A, A', A'', \ldots$, welche zusammenfallenden Wurzeln dieser Gleichung entsprechen, dienen hier zur Darstellung der Werthe $a, a', a'', \ldots$ von z.

Bezeichnen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ die m der Gleichung in u genügenden Functionen, deren Werthe bezüglich gleich

$$g, \; ge^{-\frac{2\pi}{m}i}, \; ge^{-\frac{4\pi}{m}i}, \ldots, \; ge^{-\frac{(2m-2)\pi}{m}i}$$

sind, wo g einen Werth der Wurzelgrösse

$$\sqrt{(c-a)^{m-1}(c-a')^{m-1}(c-a'')^{m-1}\ldots}$$

vorstellt, so lässt sich ohne Mühe mit Hilfe der oben dargelegten Principien nachweisen, dass jede dieser Functionen, nachdem Z auf einer der Elementar-Curven $(+A)$, $+(A')$, $(+A'')$, ... einen Umlauf vollbracht hat, den Anfangswerth der folgenden annimmt, und dass folglich dasselbe auch von den Functionen

$$v_1 = \frac{u_1}{(z-a)(z-a')\ldots}, \quad v_2 = \frac{u_2}{(z-a)(z-a')\ldots} \ldots$$

gilt.

Fragt man nun nach den Werthen, welche die Functionen $v_1, v_2, \ldots, v_m$ erhalten, sobald der Punkt Z auf dem Wege $(+A)$, $(+A') + CMK$ nach K gelangt, vorausgesetzt, dass beim Fortgange von Z auf der Curve CMK bis zum Punkte K die Werthe h_1, $h_2, \ldots, h_m$ jener Functionen herbeigeführt werden, so finden sich für v_1 der Werth h_3, für v_2 der Werth h_4, u. s. f., für v_{m-1} und v_m die Werthe h_1, h_2. Eben so ergibt sich, wenn Z auf dem Wege $(-A) + CMK$ nach K gelangt, dass $v_1, v_2, \ldots, v_m$ bezüglich die Werthe $h_m, h_1, \ldots, h_{m-1}$ erhalten.

Beiläufig bemerken wir noch, dass die Functionen v_1, $v_2, \ldots, v_m$ in convergente, nach den ganzen Potenzen von $(z-a)^{\frac{1}{\mu}}$ aufsteigende Reihen entwickelt werden können, so lange der Punkt Z innerhalb eines um den Punkt A beschriebenen Kreises bleibt, dessen Radius der kleinsten der Entfernungen AA' AA'', ... gleich

ist; und ferner, dass die negative Potenz $(z-a)^{-\frac{1}{\mu}}$ in diesen Reihen vorkommt.

10. In allem Vorhergehenden haben wir uns nur auf algebraische Gleichungen beschränkt; eben so wol sind aber die unter der Form

$$f(u,z)=0$$

begriffenen transcendenten Gleichungen den oben aufgestellten Sätzen unterworfen, wofern nur die linke Seite $f(u,z)$, so wie auch deren partielle Ableitungen aller Ordnungen nach u und z stetige Functionen dieser Variabeln sind und für jedes Werthsystem derselben nur einen bestimmten endlichen Werth besitzen; denn unsere Theorie erfordert ausser den oben abgeleiteten Bedingungen nichts weiter, als dass die Werthe von u, welche sich aus einer solchen Gleichung ergeben, continuirlich variiren, wenn dies bei z der Fall ist. Dass sich diese Eigenschaft auch wirklich auf Gleichungen aller Art erstreckt, hat Cauchy in seinen *Nouveaux Exercices de Mathématiques, T. II. p.* 109 dargethan

11. Die Sache lässt sich indessen noch auf die Weise verallgemeinern, dass man statt

$$z=x+yi$$

zu setzen, sich der Form

$$z=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$$

bedient. Hierin bezeichnen $\varphi(x,y)$ und $\psi(x,y)$ stetige Functionen, welche für jedes Werthsystem von x und y, oder mit andern Worten für jeden Punkt der xy-Ebene nur einen bestimmten endlichen und zwar reellen Werth besitzen. Auch die Gleichung

$$f(u,z)=0$$

liefert für jeden Punkt der Ebene im Allgemeinen ungleiche Werthe von u, und wir können auch hier die Frage erörtern, welchen continuirlichen Veränderungen jede derselben unterliegt, während der zu den Coordinaten x, y gehörende Punkt aus einer Anfangslage C in eine neue K übergeht.

Wir construiren zu diesem Zwecke zunächst diejenigen Punkte, welche den auf unendlich grosse oder vielfache Wurzeln der Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

führenden Werthen von z entsprechen; bedeutet $f+gi$ einen solchen Werth, so ergeben sich die Coordinaten der entsprechenden Punkte aus folgendem System von Gleichungen:

$$\varphi(x,y) = f,\ \psi(x,y) = g.$$

Nehmen wir jetzt an, dass der Punkt x,y von C bis K auf einer bestimmten Curve fortgeht, so bleibt der im Punkte K erlangte Werth der Function u ungeändert, wenn die durchlaufene Curve ohne Ueberschreitung eines Punktes, für welchen die Function u unendlich gross oder eine vielfache Wurzel der gegebenen Gleichung ist, verschoben wird. Die Beweisführung ist durchweg dieselbe, wie in dem Falle, dass $z = x + yi$ gesetzt wird.

Wenn ferner aus der Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

für einen Punkt A eine gewisse Anzahl gleicher Functionen von z entspringt, so lässt sich wieder wie zuvor beweisen, dass diese Functionen sich in eine gewisse Anzahl cyklischer Systeme abtheilen, d. h. dass wenn man sich die Functionen, welche eines dieser Systeme ausmachen, auf dem Umfange eines Kreises auf entsprechende Weise vertheilt denkt, jede derselben den Anfangswerth der folgenden annimmt, sobald man den Punkt (x,y) um den Punkt A auf einer unendlich kleinen geschlossenen Curve herumgeführt hat. Es gelten daher auch unter der in Rede stehenden allgemeineren Annahme die aus diesen Principien schon oben abgeleiteten Folgerungen.

Dritter Theil.

---

12. Wir wenden uns gegenwärtig zu der Anwendung der bisher entwickelten Theorie auf die Untersuchung der vielfachen Werthe von bestimmten Integralen. Betrachten wir die algebraische Gleichung

$$f(u,z) = 0,$$

deren linke Seite eine beliebige ganze Function von u und z vorstellen soll, indem wir wieder wie in Nr. 5 mit u_1 eine dieser Gleichung genügende Function von z bezeichnen, welche einen Werth b_1 erhält, sobald der $z = x + yi$ entsprechende Punkt Z seinen anfänglichen Ort C verlässt. Die Bedeutung des Ausdrucks $\int_c^k u_1 dz$ ist nur dann eine bestimmte, wenn ausser den Grenzen c und k noch der Weg CMK, auf welchem der bewegliche Punkt Z von C bis K fortgehen soll, vollständig gegeben ist. Allerdings erhält das Integral $\int_c^k u_1 dz$ nach Nr. 9 am Ende einen und denselben Werth, so lange die Curve CMK während einer Verschiebung keinen der Punkte $A, A', A'', \ldots.$ erreicht, für welche die Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

vielfache oder unendlich grosse Wurzeln liefert; sobald aber die Curve einen dieser Punkte überschreitet, kann das Integral eine solche Aenderung erleiden, dass es eine begrenzte oder unbegrenzte Anzahl verschiedener Werthe annimmt.

Wir wollen zuerst zeigen, wie mit Hilfe der im ersten Theile aufgestellten Principien der Werth des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ in Bezug auf eine gegebene Integrations-Curve mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen ist; dabei setzen wir wie immer voraus, dass diese

Curve durch keinen der Punkte $A, A', A'', \ldots$ hindurchgeht, da sonst das Integral unbestimmt sein könnte. Wiederholen wir die in Nr. 16 ausgeführte Construction, durch welche die Curve CMK in eine gewisse Anzahl von Theilen CMC', $C'M'C''$, $C''M''C'''$, ... (Fig. 7) zerlegt wird, so wird die Function u_1 nach Nr. 15 für die Länge des Theils CMC' durch folgende convergente Reihe dargestellt:

$$u_1 = b_1 + F_1(b_1,c).(z-c) + F_2(b_1,c).(z-c)^2 + \ldots;$$

der Werth V des Integrals $\int_c^{c'} u_1 dz$, wo sich die Integration über die Curve CMC' erstreckt, hat demnach eine convergente Reihe zum Ausdruck, welche durch Integration der einzelnen Terme der vorstehenden zwischen den Grenzen $z = c$ und $z = c'$ erhalten wird, nämlich:

$$V = b_1(c'-c) + F_1(b_1,c).\frac{(c'-c)^2}{2} + F_2(b_1,c).\frac{(c'-c)^3}{3} + \ldots$$

Ganz ähnliche Reihen gelten natürlich für die Integrale $\int_{c'}^{c''} u_1 dz$, $\int_{c''}^{c'''} u_1 dz, \ldots$, deren Werthe wir bezüglich mit $V', V'', \ldots$ bezeichnen wollen, wobei die Integrationen über die Curven $C'M'C''$, C'',M'',C''',.... auszudehnen sind, und wir erhalten somit die Gleichungen

$$V' = b'_1(c''-c') + F_1(b'_1,c').\frac{(c''-c')^2}{2} + F_2(b'_1,c').\frac{(c''-c')^3}{3} + \ldots,$$

$$V'' = b_1''(c'''-c'') + F_1(b_1'',c'').\frac{(c'''-c'')^2}{2} + F_2(b_1'',c'').\frac{(c'''-c'')^3}{3} + \ldots$$

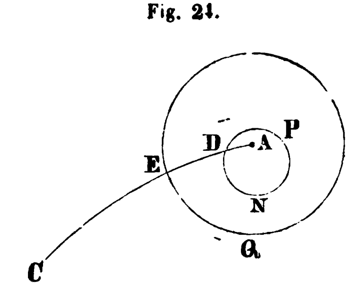
. . . .

Durch Addition dieser Grössen $V, V', V'', \ldots$, deren Anzahl stets eine begrenzte ist, erhält man dann den gesuchten Werth des Integrals $\int_c^k u_1 dz$. Oftmals gewährt eine Aenderung des Weges CMK, die sich jedoch nicht über einen der Punkte $A, A', A'', \ldots$ hinaus erstrecken darf, Bequemlichkeiten für die Rechnung.

Wir können dieselbe Methode auch benutzen, um den Werth des Integrals $\int u_1 dz$ für die ganze Ausdehnung einer beliebigen

Elementar-Curve, z. B. der Curve $(+A)$ zu ermitteln, deren Bestandtheile die Linie CD (Fig. 21), die unendlich kleine Curve $DNPD$ und die Linie DC ausmachen. Man beschreibe nämlich um den Punkt A einen Kreis, dessen Radius um eine endliche Grösse kürzer als die kleinste der Entfernungen AC, AA', AA'', AA''',.... ist, und welcher die Linie CD in E schneiden mag. An Stelle der Elementar-Curve $(+A)$ könnte man unbeschadet des Integrals eine andere, aus der Linie CE, dem Kreise $EQRE$ und der Linie EC zusammengesetzte Curve annehmen, und dann den Werth des Integrals $\int u_1 dz$ für diese Curve, welche von den Punkten A, A', A'',.... überall endliche Entfernungen hat, ohne Weiteres nach der soeben angegebenen Methode berechnen.

Fig. 21.



13. Es seien wiederum $u_1, u_2, \ldots, u_m$ die m der Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

genügenden Functionen von z; ferner mögen A_1, A_{-1}, A'_1, A'_{-1},.... die Werthe des Integrals $\int u_1 dz$ in Bezug auf die Gesammtlängen der Elementar-Curven $(+A)$, $(-A)$, $(+A')$, $(-A')$.... und ganz entsprechend A_2, A_{-2}, A'_2, A'_{-2}, ... die Werthe des Integrals $\int u_2 dz$ für dieselben Curven, u. s. f. bezeichnen, so dass überhaupt $A^{(f)}_{\pm n}$ den Werth des Integrals $\int u_n dz$ in Bezug auf die Ausdehnung der Elementar-Curve $(\pm A^{(f)})$ vorstellt. Wir wollen gegenwärtig untersuchen, welchen Werth das Integral $\int u_1 dz$ annehmen wird, wenn man dasselbe vom Punkte C aus über irgend eine geschlossene Curve $CLMC$ (Fig. 4) fortführt, wobei wir die vorhin bezeichneten Grössen, für die wir den Namen *Elementar-Integrale* wählen, als bekannt oder wenigstens nach dem in der vorigen Nummer angegebenen Verfahren berechnet voraussetzen.

Der Deutlichkeit wegen nehmen wir an, dass z. B.

$$(+A)(-A')(+A'')(-A)$$

die Charakteristik der Integrations-Curve *CLMC* sei, während wir aus Nr. 10 entnehmen, dass das Integral $\int u_1 dz$ ungeändert bleibt, wenn wir an Stelle dieser Curve folgende Reihe von Elementar-Curven einführen: $(+A), (-A'), (+A''), (-A)$. Andererseits lässt sich angeben, nachdem sich die Gruppirungsweise der Functionen $u_1, u_2 \ldots\ldots, u_m$ in cyklische Systeme um einzelne Punkte $A, A', A'', \ldots.$ herausgestellt hat, welche Function es ist, deren Anfangswerth die Function u_1 nach einem Umlaufe von Z auf der Curve $(+A)$ annimmt; es sei dies die Function u_3. Auf ähnliche Art würde man finden, dass u_3 nach einem Umlaufe von Z über $(-A')$ z. B. den Anfangswerth von u_4, dass endlich u_4 nach einem Umlaufe von Z über $(+A'')$ etwa den Anfangswerth von u_2 erhält. Demnach wären der auf die Curve $(+A)$ bezügliche Theil des verlangten Integrals gleich A_1, der über die Curve $(-A')$ genommene Theil gleich A'_{-3} und die den Curven $(+A'')$ und $(-A)$ entsprechenden Theile resp. A_4'' und A_{-2}, so dass das über die ganze geschlossene Curve *CLMC* fortgeführte Integral $\int u_1 dz$ den Werth

$$A_1 + A'_{-3} + A_4'' + A_{-2}$$

besitzt. Man sieht überhaupt ein, dass der Werth dieses Integrals, über eine durah den Punkt C gehende geschlossene Curve hin ausgedehnt, immer durch die Summe einer gewissen Anzahl der Elementar-Integrale $A_1, A_{-1}, A'_1, \ldots.., A_2, \ldots.$ dargestellt wird.

11. Nachdem wir diese erste Frage beantwortet haben, wollen wir die Werthe des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ für die nur möglichen Integrations-Curven zwischen C und K aufsuchen Wenn wir von einer ersten, zwischen den Punkten C und K beliebig gestalteten Curve *CMK* (Fig. 17.) ausgehen und mit $v_1, v_2, \ldots.., v_m$ die Werthe der über diese Curve genommenen Integrale $\int_c^k u_1 dz$, $\int_c^k u_2 dz, \ldots.., \int_c^k u_m dz$ bezeichnen, so handelt es sich zunächst um

die Ermittelung des Werthes vom Integral $\int_c^k u_1 dz$ in Bezug auf eine beliebige andere Integrations-Curve CLK.

Beispielsweise sei

$$(+A)(-A')(+A'')(-A)+CMK$$

die Charakteristik dieser Curve und ferner mag, mit Beibehaltung der in der vorigen Nummer gemachten Annahmen, die Function u_2 nach einem Umlaufe von Z über $(-A)$ etwa den Anfangswerth von u_5 erhalten. Da man nun nach Nr. 9 an Stelle der Curve CLK die durch die einzelnen Terme der Charakteristik angedeutete Curvenreihe einführen kann, so findet man sofort für das gesuchte Integral folgenden Ausdruck:

$$A_1 + A'_{-3} + A_4'' + A_{-2} + v_5.$$

Hieraus ergibt sich, dass man die übrigen, von v_1 verschiedenen Werthe des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ durch Addition einer der Grössen v_1, $v_2, \ldots, v_m$ und eines oder mehrerer der Elementar-Integrale A_1, A_{-1}, $A'_1, \ldots, A_2, \ldots$ gewinnt, wobei zwar ein und dasselbe Elementar-Integral in dieser Summe mehrfach vorkommen kann, obgleich jedoch im Allgemeinen, was ausdrücklich hervorgehoben wird, nicht ein Werth des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ entsteht, wenn man eine der Grössen $v_1, v_2, \ldots, v_m$ zu einer gewissen Anzahl der Grössen $A_1, A_{-1}, A_1', \ldots, A_2, \ldots$ addirt, nachdem diese mit irgend welchen ganzen Zahlen multiplicirt worden sind.

45. Die Elementar-Integrale $A_1, A_{-1}, \ldots$ besitzen mehrere bemerkenswerthe Eigenschaften. Da nämlich, wenn u_g diejenige Function bezeichnet, deren Anfangswerth der Function u_f nach einem Umlaufe von Z über die Elementar-Curve $(+A)$ zukommt, umgekehrt u_g den Anfangswerth von u_f erhält, nachdem Z auf der Curve $(-A)$ einen Umlauf vollbracht hat; so sind die Elemente der mit A_f und A_{-g} bezeichneten Integrale paarweise gleich und entgegengesetzt, und man hat folglich:

$$A_{-g} = -A_f.$$

Demnach ist jedes der Integrale $A_{-1}, A_{-2}, \ldots, A_{-m}$ in Bezug auf die Curve $(-A)$ von gleichem und entgegengesetztem Werthe, wie eines der Integrale $A_1, A_2, \ldots, A_m$, über die Curve $(+A)$ ausgedehnt; und umgekehrt.

16. Nehmen wir insbesondere an, dass die Function u_f nach einem Umlauf von Z über die Curve $(+A)$ ihren Anfangswerth wieder erhält, so findet dies auch auf der Curve $(-A)$ statt, und die vorstehende Gleichung geht über in:

$$A_{-f} = -A_f.$$

Für diesen Fall folgt aus Nr. 11, dass die Grösse A_f von dem Ausgangsorte C des beweglichen Punktes Z unabhängig ist, dass dieselbe also ungeändert bleibt, wenn man den Punkt C verlegt und gleichzeitig die Elementar-Curve (A) ohne Ueberschreitung eines der Punkte $A, A', A'' \ldots$ verschiebt. Man kann somit A_f als den Werth des Integrals $\int u_f dz$, welches sich über eine um den Punkt A beschriebene unendlich kleine Curve erstreckt, betrachten, woraus sich dann ergibt, dass wenn die Function u_f im Punkte A einen endlichen Werth behält, sich das Integral A_f auf Null reducirt.

Wählt man nämlich für die eben genannte unendlich kleine Curve einen um den Punkt A beschriebenen Kreis, dessen Radius eine sehr kleine Grösse ϱ ist, so hat man zunächst für einen Punkt dieses Kreises

$$z = a + \varrho e^{\tau i},$$

wo τ einen reellen Winkel bezeichnet, also

$$dz = i\varrho e^{\tau i} d\tau,$$

folglich

$$A_f = i\varrho \int_0^{2\pi} u_f e^{\tau i} d\tau.$$

Da nun u_f für sehr kleine Werthe von ϱ einen endlichen Werth behält, so gilt dies auch von dem Integral $\int_0^{2\pi} u_f e^{\tau i} d\tau$, so dass sich der Ausdruck von A_f gleichzeitig mit ϱ auf Null reducirt; weil

aber das Integral A_f von ϱ selbst unabhängig ist, so hat man in der That

$$A_f = 0.$$

47. Es gibt einen merkwürdigen Fall, welcher Relationen zwischen den Elementar-Integralen darbietet, deren wir uns in der Folge mit Vortheil bedienen werden; dieser Fall ist nämlich der, wo sich nach einem Umlauf von Z auf einer durch den Punkt C gehenden Curve Δ, die alle Punkte $A, A', A'', \ldots$ umgibt, die Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ zum Theil wieder auf ihre Anfangswerthe reduciren.

Es sei u_f eine der Functionen, welche dieser Bedingung unterworfen sind; die Charakteristik (Δ) der in directem Sinne zu durchlaufenden Curve Δ wird aus den Termen $(+A)$, $(+A')$, $(+A'')$, ..., die auf gewisse Art und zwar ohne Wiederholungen angeordnet sind, zusammengesetzt sein, so dass wir immer nur die Formel

$$(\Delta) = (+A)\,(+A')\,(+A'')\ldots.$$

festzuhalten haben; ferner soll die Function u_f, sobald Z auf den geschlossenen Curven, deren Charakteristiken durch $(+A)$, $(+A)(+A')$, $(+A)(+A')(+A'')$, u. s. w. dargestellt sind, herumgeführt ist, bezüglich die Anfangswerthe von $u_{f'}$, $u_{f''}$, $u_{f'''}, \ldots$ erhalten, so dass das Integral $\int u_f dz$, über die Curve Δ ausgedehnt, folgenden Werth besitzt:

$$A_f + A'_{f'} + A''_{f''} + A'''_{f'''} + \ldots.$$

Wenn wir jetzt um den Anfangspunkt der Coordinaten O einen Kreis Θ beschreiben, dessen Radius R länger als die grösste der Entfernungen OA, OA', OA'', ... ist; so muss sich offenbar die Curve Δ ohne Ueberschreitung eines der Punkte $A, A', A'', \ldots$ der Art verschieben lassen, dass sie mit diesem Kreise zur Coincidenz gebracht werden kann, und folglich ist der auf den Kreis Θ bezügliche Werth des Integrals $\int u_f dz$ ebenfalls der Summe

$$A_f + A'_{f'} + A''_{f''} + A'''_{f'''} + \ldots.$$

gleich.

Um aber hierfür noch einen zweiten Ausdruck zu erhalten, wollen wir die neue Variable z' einführen mit der Bedeutung $z' = \frac{1}{z}$ und uns einen beweglichen Punkt Z' vorstellen, dessen Coordinaten, auf ein neues Axensystem $O'x'$, $O'y'$ bezogen, den reellen Theil und den Coefficienten von i der Grösse z' ausmachen. Dadurch werden die Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ in Functionen von z' verwandelt, welche der algebraischen Gleichung

$$f\left(u, \frac{1}{z'}\right) = 0$$

genügen müssen. Da es nun ausserhalb des Kreises Θ in endlichem Abstande vom Anfangspunkte O keine Lage des Punktes Z gibt, für welche die Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

vielfache oder unendlich grosse Wurzeln hätte, so ist auch eben so innerhalb des um den Punkt O' construirten Kreises Θ', dessen Radius gleich $\frac{1}{R}$ ist, bis zum Anfangspunkte O' hin keine Lage des Punktes Z' möglich, wofür die Gleichung

$$f\left(u, \frac{1}{z'}\right) = 0$$

vielfache oder unendlich grosse Wurzeln lieferte. Beachten wir nun, dass die Function u_f, der Voraussetzung gemäss, nach einem Umlauf von Z auf dem Kreise Θ ihren Anfangswerth wieder annimmt, und eben deswegen auch nach einem Umlaufe von Z' auf dem Kreise Θ'; dass sie folglich der einzige Term ist, welcher das cyklische System um den Punkt O' ausmacht, und sich alsdann für den inneren Raum des Kreises Θ' in eine convergente, nach den ganzen Potenzen von z' aufsteigende Reihe, welche nach Nr. 38 mit einer begrenzten Anzahl negativer Potenzen beginnen kann, entwickeln lässt: so können wir für eine Norm von z', die kleiner oder höchstens eben so gross als $\frac{1}{R}$ ist, schreiben:

$$u_f = \alpha_f z'^{-p} + \beta_f z'^{-p+1} + \ldots + \varkappa_f + \lambda_f z' + \mu_f z'^2 + \ldots,$$

wo p eine ganze positive Zahl und $\alpha_f, \beta_f, \ldots, \varkappa_f, \lambda_f, \mu_f, \ldots$ von z' unabhängige Coefficienten bezeichnen; und andererseits muss dem-

nach für eine Norm von z, die grösser oder mindestens eben so gross als R ist, folgende Reihe gelten:

$$u_f = \alpha_f z^p + \beta_f z^{p-1} + \ldots + \varkappa_f + \frac{\lambda_f}{z} + \frac{\mu_f}{z^2} + \ldots$$

Um nun das über den Kreis Θ ausgedehnte Integral $\int u_f dz$ zu erhalten, genügt es nur

$$z = Re^{\tau i}$$

zu setzen, woraus folgt

$$dz = iRe^{\tau i}d\tau,$$

mithin ist

$$\int u_f dz = i \left\{ \begin{array}{l} \alpha_f R^{p+1} \int_0^{2\pi} e^{(p+1)\tau i} d\tau \\ + \beta_f R^p \int_0^{2\pi} e^{p\tau i} d\tau + \ldots \\ + \varkappa_f R \int_0^{2\pi} e^{\tau i} d\tau + \lambda_f \int_0^{2\pi} d\tau \\ + \frac{\mu_f}{R} \int_0^{2\pi} e^{-\tau i} d\tau + \ldots \end{array} \right\} = 2\pi i \lambda_f .$$

Somit erhalten wir die Gleichung:

$$A_f + A'_{f} + A''_{f'} + A'''_{f''} + \ldots = 2\pi i \lambda_f,$$

wo λ_f den Coefficienten von $\frac{1}{z}$ in der nach den absteigenden Potenzen von z fortschreitenden Entwickelung für u_f bedeutet; eine solche Gleichung findet für jede Function u_f statt, welche nach einem Umlauf von Z auf der alle Punkte A, A', A'',.... umgebenden geschlossenen Curve $\varDelta$ ihren Anfangswerth wieder annimmt.

48. Es wurde schon früher in Nr. 44 bemerkt, dass im Allgemeinen keineswegs ein Werth von $\int_c^k u_1 dz$ entsteht, wenn man irgend welche ganze Vielfache der Elementar-Integrale mit einer von den Grössen v_1, v_2,...., v_m durch Addition verbindet; jedoch gibt es gewisse Klassen unter diesen Integralen, welche die merkwürdige Eigenschaft besitzen, dass wenn die Summe aller zu einer solchen Klasse gehörenden Elementar-Integrale, die stets von c unabhängig ist, beliebig oft mit einem Werthe des Integrals $\int_c^k u_1 dz$

durch Addition oder Subtraction verbunden wird, immer ein Werth desselben wiederkehrt.

Es sei nämlich w der auf die Curve $(\Gamma) + CMK$ bezügliche Werth des Integrals $\int_c^k u_1 dz$, wobei mit (Γ) die Charakteristik einer durch den Punkt C gehenden geschlossenen Curve angedeutet ist; ferner seien (Γ') und (Γ'') zwei Klassen von Termen der Charakteristik (Γ) (von denen auch eine gleich Null sein kann), so dass sich die Charakteristik $(\Gamma) + CMK$ in der Form $(\Gamma')(\Gamma'') + CMK$ darstellt. Bezeichnet man nun mit u_n diejenige Function, in deren Anfangswerth die Function u_1 nach einem Umlauf des Punktes Z auf der geschlossenen Curve (Γ') übergeht, so wird man auf mannigfache Weise eine geschlossene Curve der Art durch den Punkt C legen können, dass die Function u_n nach einem Umlauf von Z auf dieser Curve ihren Anfangswerth wieder erhält. Es mag (Φ) oder $(-\Phi)$ die Charakteristik einer solchen Curve vorstellen, je nachdem Z auf dieser im einen oder andern Sinne herumgeführt wird, und ferner p den auf die Curve (Φ) bezüglichen Werth des Integrals $\int u_n dz$; alsdann ist diese Grösse p erstens nach Nr. 43 durch die Summe einer gewissen Anzahl von Elementar-Integralen darstellbar, und zweitens, wie sich aus Nr. 12 ergibt, von der Lage des Punktes C unabhängig.

Somit besitzt das Integral $\int_c^k u_1 dz$, wenn sich die Integration über die Curven

$$(\Gamma')(\Phi)(\Gamma'') + CMK,$$
$$(\Gamma')(\Phi)(\Phi)(\Gamma'') + CMK,$$
$$(\Gamma')(\Phi)(\Phi)(\Phi)(\Gamma'') + CMK,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$(\Gamma')(-\Phi)(\Gamma'') + CMK,$$
$$(\Gamma')(-\Phi)(-\Phi)(\Gamma'') + CMK,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

erstreckt, bezüglich die Werthe:

$$p+w, \quad 2p+w, \; 3p+w, \ldots,$$
$$-p+w, \; -2p+w, \ldots.$$

Wir sehen hieraus, dass durch Addition irgend eines Vielfachen von p zu dem Werthe w des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ wiederum ein Werth desselben gewonnen wird, und nennen aus diesem Grunde p eine *Periode* des Integrals $\int_c^k u_1 dz$.

Es bieten sich nun in Bezug hierauf folgende Hauptfragen dar:

1) Alle selbstständig auftretenden Perioden anzugeben, welche einem Werthe von $\int_o^k u_1 dz$ zukommen; hierbei können solche nicht als selbstständig betrachtet werden, die sich durch Addition von ganzen Vielfachen der übrigen ergeben, wie z. B. nicht $2p$ als eine von p, oder $p+q$ als eine von p und q wesentlich verschiedene Periode zur Geltung kommt.

2) Es ist zu entscheiden, ob jede Periode p allen oder nur gewissen Werthen des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ angehört.

3) Diejenigen Werthe von $\int_c^k u_1 dz$ zu ermitteln, welche einer Reduction nicht fähig sind, wenn man eben von den ganzen Vielfachen der Perioden absieht.

Die Erörterung dieser Fragen für mehrere specielle Fälle soll den Gegenstand der folgenden Nummern ausmachen.

49. Der einfachste Fall, welchen wir zunächst zu betrachten haben, ist der, wenn die Function u rational ist; hier ist nämlich die Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

vom ersten Grade und liefert natürlich keine vielfachen Wurzeln, während dagegen der Werth von u für gewisse Werthe von z unendlich gross sein kann. Es seien $a, a', a'', \ldots$ diese Werthe und $A, A', A'', \ldots$ die ihnen entsprechenden Punkte; alsdann lässt sich u jederzeit in die Form:

$$\frac{E}{z-a}+\frac{E_1}{(z-a)^2}+\frac{E_2}{(z-a)^3}+\ldots+\frac{E_{m-1}}{(z-a)^m}$$
$$+\frac{E'}{z-a'}+\frac{E_1'}{(z-a')^2}+\ldots+\frac{E'_{m'-1}}{(z-a')^{m'}}$$
$$+\frac{E''}{z-a''}+\frac{E_1''}{(z-a'')^2}+\ldots+\frac{E''_{m''-1}}{(z-a'')^{m''}}+\ldots+s(z)$$

bringen, wo $E, E_1, E_2, \ldots, E_1', E_2', \ldots$ Constanten und $s(z)$ eine ganze Function von z vorstellen.

Da hier die über die Curven $(+A)$, $(-A)$, $(+A')$, $(-A')$, $(+A'')$, $(-A'')$, ... ausgedehnten Elementar-Integrale von der Lage des Punktes C unabhängig sind und bezüglich die Werthe:

$$+2\pi iE, \quad -2\pi iE, \quad +2\pi iE',$$
$$-2\pi iE', \quad +2\pi iE'', \quad -2\pi iE'',$$
$$\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots,$$

besitzen, so sind, wenn wir mit v den Werth des Integrals $\int_a^k u\,dz$ für eine bestimmte Integrations-Curve CMK bezeichnen, die Werthe dieses letztern sämmtlich in der Formel

$$v+2\pi i(nE+n'E'+n''E''+\ldots)$$

enthalten, wo $n, n' n'', \ldots$ beliebige positive oder negative ganze Zahlen bedeuten, die auch Null sein können.

Im Allgemeinen sind die Perioden $2\pi iE$, $2\pi iE'$, $2\pi iE''$, ... selbstständig und ausserdem in derselben Anzahl vorhanden, wie die Werthe von z, für welche die Function u unendlich wird; anders verhielte es sich aber, wenn eine oder mehrere der Zahlen $E, E', E'', \ldots$ durch Addition von ganzen Vielfachen der übrigen gebildet werden könnten. Offenbar gibt es unendlich viele Werthe des Integrals $\int_c^k u_1 dz$, wofern nicht die Zahlen $E, E', E'', \ldots$ sämmtlich gleich Null sind, in welchem Falle das Integral nur den Werth v haben würde.

Dasselbe, was für die rationale Function u gilt, hat auch Gültigkeit für jede transcendente Function, welche sich in die Form:

$$\frac{E}{z-a}+\frac{E_1}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{E_{m-1}}{(z-a)^m}+\frac{E'}{z-a'}+\ldots$$
$$+\frac{E'_{m'-1}}{(z-a')^{m'}}+\ldots+\vartheta(z)$$

bringen lässt, wo $\vartheta(z)$ eine für jeden endlichen Werth von z einwerthige Function ist, die zugleich endlich und stetig bleibt. Für die mit $E, E', \ldots$ bezeichneten Constanten hat Cauchy in seinen über dieselben angestellten Untersuchungen den Namen „*Residuen* der Funtion u in Bezug auf die Werthe $a, a', \ldots$ von z" gewählt; auch andererseits stimmen die für den vorliegenden Fall ermittelten Perioden des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ mit den von diesem berühmten Mathematiker angegebenen *) vollkommen überein.

Wir wollen jetzt beispielsweise die Perioden des Integrals $\int_c^k \frac{dz}{1+z^2}$ aufsuchen. Von den Grössen $E, E', \ldots$ sind hier nur zwei vorhanden, welche nämlich gleich $+i$ und $-i$ sind, so dass die beiden Perioden des Integrals die Werthe $+\pi$ und $-\pi$ besitzen; da dieselben aber gleich und entgegengesetzt sind, so fallen sie in eine einzige $+\pi$ zusammen. Bekanntlich werden die Werthe des Integrals $\int_c^k \frac{dz}{1+z^2}$ durch die verschiedenen Bögen v dargestellt, deren trigonometrische Tangente gleich k ist, und es gilt für jeden dieser Bögen die allgemeine Formel $v+n\pi$.

50. Wenn die Gleichung

$$f(u,z)=0$$

in Bezug auf u vom zweiten Grade ist, so können wir die beiden Werthe von u in der Form:

---

*) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.* T. XXIII (*année* 1846).

$$u = \frac{P}{Q} \pm \frac{R}{S}\sqrt{\frac{T}{U}}$$

darstellen, wo P, Q, R, S, T, U ganze Polynome sind. Setzen wir voraus, was gestattet ist, dass weder T, noch U gleiche Factoren enthält, dass ferner R und T weder mit S, noch mit U, so wie auch P nicht mit Q Factoren gemeinschaftlich besitzen; so werden diejenigen Werthe von z, für welche eines der Polynome Q, R, S, T, U verschwindet, doppelten oder unendlich grossen Wurzeln der Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

entsprechen.

Es mögen nun die Punkte $A, A', A'', \ldots.$ solchen Werthen von z zugehören, für welche T oder U verschwindet, und die Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \ldots.$ solchen Werthen von z, für die eines der Polynome Q, R, S verschwindet, jedoch weder T, noch U; sind alsdann $(\pm A), (\pm A'), \ldots.$ die um die Punkte $A, A' \ldots.$ und $(\pm \mathfrak{A})$, $(\pm \mathfrak{A}'), \ldots.$ die um die Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots.$ beschriebenen Elementar-Curven, ferner $A_{\pm 1}$, $A_{\pm 2}$, $A'_{\pm 1}$, $A'_{\pm 2}, \ldots.$ die auf die Curven $(\pm A)$, $(\pm A'), \ldots.$ und $\mathfrak{A}_{\pm 1}$, $\mathfrak{A}_{\pm 2}$, $\mathfrak{A}'_{\pm 1}$, $\mathfrak{A}'_{\pm 2}, \ldots.$ die auf die Curven $(\pm \mathfrak{A})$, $(\pm \mathfrak{A}'), \ldots.$ bezüglichen Elementar-Integrale: so sieht man leicht ein, dass die beiden Functionen u_1 und u_2 um jeden der Punkte A, A' $A'', \ldots.$ ein cyklisches System bilden, so dass, wenn $A^{(\sigma)}$ irgend einen dieser Punkte bezeichnet, nach Nr. 45:

$$\overset{(\sigma)}{A}_{-1} = -\overset{(\sigma)}{A}_2 \;, \quad \overset{(\sigma)}{A}_{-2} = -\overset{(\sigma)}{A}_1$$

ist.

Da andererseits, wenn allgemein mit $\mathfrak{A}^{(\sigma)}$ einer der Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \ldots.$ bezeichnet wird, jede der Functionen u_1, u_2 ihren eignen Anfangswerth wieder erhält, nachdem Z einen unendlichen kleinen Umlauf um den Punkt $\mathfrak{A}^{(\sigma)}$ gemacht hat, so ist nach Nr. 46:

$$\overset{(\sigma)}{\mathfrak{A}}_{-1} = -\overset{(\sigma)}{\mathfrak{A}}_1 \;, \quad \overset{(\sigma)}{\mathfrak{A}}_{-2} = -\overset{(\sigma)}{\mathfrak{A}}_2 \,.$$

Setzt man nun diese Elementar-Integrale, so wie auch die Werthe v_1 und v_2 der über eine bestimmte Curve *CMK* fortge-

führten Integrale $\int_c^k u_1 dz$, $\int_c^k u_2 dz$ als bekannt voraus, so lässt sich der Werth des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ für eine beliebige andere Integrations-Curve CLK, deren Charakteristik gegeben ist, berechnen. Wir wollen jetzt allgemeine Ausdrücke aufstellen, welche die Werthe von $\int_c^k u_1 dz$ für alle von C nach K führenden Integrations-Curven CLK umfassen.

Es sei $(\varDelta)$ die Charakteristik der Curve CLK und $[\pm \mathfrak{A}^{(\sigma)}]$ ein Term derselben, welchem schon n Terme vorangehen mögen. Sobald der Punkt Z über die durch die n ersten Terme von $(\varDelta)$ dargestellten Elementar-Curven herumgeführt ist, wird die Function u_1 entweder ihren eignen Anfangswerth annehmen, oder auch den Anfangswerth von u_2 erhalten; im ersten Falle ist der über die Elementar-Curve $[\pm \mathfrak{A}^{(\sigma)}]$ ausgedehnte Theil des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ gleich $\mathfrak{A}^{(\sigma)}_{\pm 1}$, im andern Falle gleich $\mathfrak{A}^{(\sigma)}_{\pm 2}$. Da nun die Function u_1, nachdem Z diese $(n+1)$te Elementar-Curve zurückgelegt, den nach Durchlaufung der n ersten Elementar-Curven eingetretenen Werth wieder annimmt, so darf man in der Charakteristik $(\varDelta)$ alle Terme der Form $[\pm \mathfrak{A}^{(\sigma)}]$ unterdrücken; wir beschränken daher unsere Aufmerksamkeit auf den Werth von $\int_c^k u_1 dz$ für die hierdurch vereinfachte Integrations-Curve und fügen nur zu diesem Werthe eine Grösse von folgender Form hinzu:

$$\begin{aligned} F = & \, l_1 \mathfrak{A}_1 + l'_1 \mathfrak{A}'_1 + l''_1 \mathfrak{A}''_1 + \ldots \\ & + l_{-1} \mathfrak{A}_{-1} + l'_{-1} \mathfrak{A}_{-1} + l''_{-1} \mathfrak{A}''_{-1} + \ldots \\ & + l_2 \mathfrak{A}_2 + l_2' \mathfrak{A}_2' + \ldots \\ & + l_{-2} \mathfrak{A}_{-2} + l'_{-2} \mathfrak{A}'_{-2} + \ldots, \end{aligned}$$

wo $l_1, l'_1, l''_1, \ldots, l_{-1}, l'_{-1}, \ldots, l_2, l'_2, \ldots$ lauter ganze positive Zahlen vertreten, welche auch gleich Null und selbst negativ sein können, weil

$$\overset{(\sigma)}{l}_{-1} \overset{(\sigma)}{\mathfrak{A}}_{-1} = - \overset{(\sigma)}{l}_{-1} \overset{(\sigma)}{\mathfrak{A}}_1, \quad \overset{(\sigma)}{l}_{-2} \overset{(\sigma)}{\mathfrak{A}}_{-2} = - \overset{(\sigma)}{l}_{-2} \overset{(\sigma)}{\mathfrak{A}}_2$$

ist. Offenbar werden diesen ganzen Zahlen die beabsichtigten Werthe dadurch beigelegt, dass man die Curve CLK auf geeignete Weise gestaltet, wozu es nur der Einführung neuer Terme der Form $[\pm \mathfrak{A}^{(\sigma)}]$ in die Charakteristik $(\mathcal{A})$ bedarf.

Nachdem die Terme der Form $[\pm \mathfrak{A}^{(\sigma)}]$ aus dieser Charakteristik abgeschieden worden, handelt es sich nur noch um solche von der Form $[\pm A^{(\sigma)}]$, abgesehen von dem letzten Term $+ CMK$, und die Charakteristik wird sich nach dieser Modification auf

$$(\mathcal{A}') = [\pm A^{(\alpha)}]\,[\pm A^{(\beta)}]\,[\pm A^{(\gamma)}]\,[\pm A^{(\delta)}]\ldots.[\pm A^{(\sigma)}] + CMK$$

reduciren. Alsdann wird die Function u_1 bei den auf einander folgenden Uebergängen des Punktes Z auf alle einzelnen Elementar-Curven derselben abwechselnd entweder den Anfangswerth von u_2, oder ihren eignen Anfangswerth erhalten, so dass das über die Curve $(\mathcal{A}')$ fortgeführte Integral $\int_c^k u_1 dz$, wenn die Anzahl der in $(\mathcal{A}')$ zusammengefassten Elementar-Curven gerade ist, den Werth

$$V_1 = \overset{(\alpha)}{A}_{\pm 1} + \overset{(\beta)}{A}_{\pm 2} + \overset{(\gamma)}{A}_{\pm 1} + \overset{(\delta)}{A}_{\pm 2} + \ldots. + \overset{(\sigma)}{A}_{\pm 2} + v_1,$$

wenn aber die genannte Anzahl ungerade ist, den Werth

$$V_2 = \overset{(\alpha)}{A}_{\pm 1} + \overset{(\beta)}{A}_{\pm 2} + \overset{(\gamma)}{A}_{\pm 1} + \overset{(\delta)}{A}_{\pm 2} + \ldots. + \overset{(\sigma)}{A}_{\pm 1} + v_2$$

besitzt.

Bezeichnen wir jetzt mit B, B_1, B_{11}, ... sämmtliche Resultate der Addition einer der Grössen $A_{\pm 2}$, $A'_{\pm 2}$, $A''_{\pm 2}$, ... zu einer der Grössen $A_{\pm 1}$, $A'_{\pm 1}$, $A''_{\pm 1}$, ..., so erscheint jeder der Ausdrücke V_1 und V_2 als eine gewisse aus den Grössen B, B_1, B_{11}, ... gebildete Summe, in welcher auch eine und dieselbe mehrfach wiederholt vorkommen kann, während jedoch das erste Mal nur der letzte und das zweite Mal die beiden letzten Terme als solche wieder auftreten. Wir erhalten somit:

$$V_1 = mB + m_1 B_1 + m_{11} B_{11} + \ldots. + v_1,$$

$$V_2 = mB + m_1 B_1 + m_{11} B_{11} + \ldots. + \overset{(\sigma)}{A}_{\pm 1} + v_2,$$

wo m, m_1, m_{11}, ... beliebige ganze Zahlen vorstellen, die positiv,

Null, oder auch negativ sein können, da die Grössen $B, B_1, B_{11}, \ldots.$ an sich paarweise, gleich und mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftet sind. Da ausserdem folgende Gleichung gilt:

$$A_1 + A_{-2} = 0$$

oder überhaupt

$$\overset{(\sigma)}{A}_{\pm 1} = \overset{(\sigma)}{A}_{\pm 1} + A_{-2} + A_1,$$

wo die Summe $\overset{(\sigma)}{A}_{\pm 1} + A_{-2}$ durch eine der Grössen B, B_1, $B_{11}, \ldots.$ vorgestellt wird, so können wir in Betreff des Integrals V_2 auch schreiben:

$$V_2 = mB + m_1 B_1 + m_{11} B_{11} + \ldots. + A_1 + v_2.$$

Als Summen aus der Grösse F und einer der Grössen V_1, V_2 lassen sich also sämmtliche Werthe des bestimmten Integrals $\int_c^k u_1 dz$ in Bezug auf beliebige Integrations-Curven CLK durch die beiden Formeln

$$G + v_1 \text{ und } G + A_1 + v_2$$

darstellen, wo zur Abkürzung unter G die Grösse

$$\begin{aligned} G = & l_1 \mathfrak{A}_1 + l'_1 \mathfrak{A}'_1 + l''_1 \mathfrak{A}''_1 + \ldots. \\ & + l_{-1} \mathfrak{A}_{-1} + l'_{-1} \mathfrak{A}'_{-1} + \ldots. \\ & + l_2 \mathfrak{A}_2 + l'_2 \mathfrak{A}'_2 + \ldots. \\ & + l_{-2} \mathfrak{A}_{-2} + l'_{-2} \mathfrak{A}'_{-2} + \ldots. \end{aligned}$$

und unter $l_1, l'_1, \ldots., l_{-1}, l'_{-1}, \ldots., l_2, \ldots., l_{-2}, \ldots., m, m_1, m_{11} \ldots.$ durchaus beliebige ganze positive, oder negative Zahlen, die auch gleich Null sein können, zu verstehen sind. Sämmtliche Werthe des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ ergeben sich demnach, wenn man ein Mal zu dem Werthe v und das andere Mal zu $A_1 + v_2$ beliebige ganze Vielfache der Grössen

$$\begin{aligned} & \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}'_1, \mathfrak{A}''_1, \ldots., \mathfrak{A}_{-1}, \mathfrak{A}'_{-1}, \mathfrak{A}''_{-1}, \ldots., \\ & \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}'_2, \ldots., \mathfrak{A}_{-2}, \mathfrak{A}'_{-2}, \ldots., \\ & B, B_1, B_{11}, \ldots. \end{aligned}$$

addirt.

Hieraus erkennt man ohne Weiteres, dass eben diese Grössen lauter Perioden des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ darstellen, dass jede andere Periode desselben unter ihnen mit begriffen ist; dass sie aber nicht selbstständig sein werden, und zwar wegen der oben aufgestellten Gleichungen:

$$\overset{(\sigma)}{\mathfrak{A}}_{1} = -\overset{(\sigma)}{\mathfrak{A}}_1\,,\quad \overset{(\sigma)}{\mathfrak{A}}_{-2} = -\overset{(\sigma)}{\mathfrak{A}}_2\,,$$

$$\overset{(\sigma)}{A}_{-1} = -\overset{(\sigma)}{A}_2\,,\quad \overset{(\sigma)}{A}_{-2} = -\overset{(\sigma)}{A}_1$$

sich auf die folgenden, im Allgemeinen selbstständigen Perioden zurückführen lassen:

$$\mathfrak{A}_1\,, \mathfrak{A}'_1\,, \mathfrak{A}''_1\,, \ldots\ldots, \mathfrak{A}_2\,, \mathfrak{A}'_2\,, \mathfrak{A}''_2\,, \ldots\ldots,$$

$$A_1 + A_2\,,\; A_1 + A'_2\,,\; A_1 + A''_2\,,\; A_1 + A'''_2\,, \ldots\ldots,$$

$$A_2 + A'_1\,,\; A_2 + A''_1\,,\; A_2 + A'''_1\,, \ldots\ldots,$$

$$A'_1 + A'_2\,,\; A'_1 + A''_2\,,\; A'_1 + A'''_2\,, \ldots\ldots,$$

$$A'_2 + A''_1\,,\; A'_2 + A'''_1\,, \ldots\ldots,$$

$$A''_1 + A''_2\,,\; A''_1 + A'''_2\,, \ldots\ldots,$$

$$A''_2 + A'''_1\,, \ldots\ldots,$$

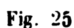
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

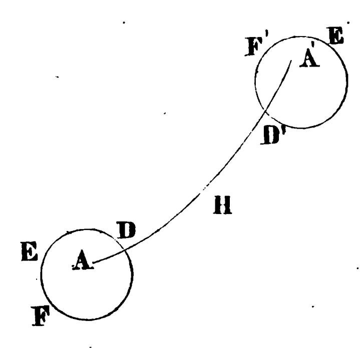
welche sich in besondern Fällen auf eine noch geringere Anzahl reduciren können.

Aus der in Nr. 46 eingeschalteten Bemerkung entnehmen wir zuvörderst 1) dass eine Periode der ersten Reihe, also $\mathfrak{A}_1$, oder $\mathfrak{A}_2, \ldots$, von den Grenzen c und k unabhängig ist und geradezu als der Werth des Integrals $\int u_1 dz$ oder $\int u_2 dz$ betrachtet werden muss, wo sich die Integrationen über eine unendlich kleine, um den Punkt $\mathfrak{A}$ beschriebene geschlossene Curve erstrecken; 2) dass eine Periode von der Art $A_1 + A_2$ den Werth des Integrals $\int (u_1 + u_2) dz$ für die ganze Ausdehnung der Elementar-Curve $(+A)$ darstellt, während zugleich, da die Function $u_1 + u_2$ nach einem Umlauf von Z auf dieser Elementar-Curve ihren Anfangswerth wieder annimmt, das in Rede stehende Integral nach Nr. 11 von der Lage des Punktes C unabhängig ist, und daher eine un-

endlich kleine, den Punkt A umgebende Integrations-Curve zu Grunde gelegt werden kann; 3) dass endlich eine Periode von der Art $A_1 + A'_2$ dem Werthe des Integrals $\int u_1 dz$, dessen Integrations-Curve die Charakteristik $(+A)(+A')$ besitzt, gleich ist, während, da der Anfangswerth der Function u_1 nach einem Umlauf von Z auch auf dieser Curve wiederkehrt, abermals das Integral oder die ihm gleichgeltende Periode $A_1 + A'_2$ von der Lage des Punktes C unabhängig ist, und demnach jede die Punkte A und A' umgebende geschlossene Curve, welche sich jedoch ohne Ueberschreitung eines der Punkte $A, A', A'', \ldots\ldots, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \ldots\ldots$ mit der Curve $(+A)(+A')$ zur Coincidenz bringen lässt, als Integrations-Curve dienen kann. Somit ist klar, dass überhaupt sämmtliche Perioden des vorhin aufgestellten Systems von den Grenzen c und k des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ unabhängig sind.

Wir wollen nun die bereits ausgesprochene Behauptung beweisen, dass die Periode $A_1 + A'_2$ dem Werthe des Integrals $\int u_1 dz$ für eine um die beiden Punkte A und A' beschriebene geschlossene Curve gleich ist. Es sei $ADHD'A'$ (Fig. 25.) eine zwischen diesen Punkten ausgedehnte Curve, mit welcher die in Rede stehende allmälig zur Coincidenz gebracht werden kann, ohne Ueberschreitung eines der Punkte $A, A', A'', \ldots\ldots$, so dass wir diese durch diejenige Curve ersetzen können, deren Bestandtheile die Curve DHD', die unendlich kleine geschlossene Curve $D'E'F'D'$, die Curve $D'HD$ und endlich die unendlic kleine Curve $DEFD$ sind. Es gibt einen sehr allgemeinen Fall, wo die auf die unendlich kleinen Curven $DEFD$ und $D'E'F'D'$ bezüglichen Theile des Integrals $\int u_1 dz$ zu Null herab-


Fig. 25



sinken, während die räumlichen Ausdehnungen dieser Curven ihrerseits bis zum blossen Punkte abnehmen; dieser Fall ist offenbar der, wo die Grenze des Products $(z-a)u_1$ für $z=a$ und die Grenze des Products $(z-a')u_1$ für $z=a'$ beide verschwinden. Da sich nämlich die Function u_1 für sehr kleine Werthe der Norm von $z-a$ nach den ganzen negativen und positiven Potenzen von $(z-a)^{\frac{1}{2}}$ entwickeln lässt, so muss sich, wenn das Product $(z-a)u_1$ für $z=a$ verschwinden soll, die Function u_1 durch folgende Reihe darstellen lassen:

$$u_1 = A(z-a)^{-\frac{1}{2}} + B + C(z-a)^{\frac{1}{2}} + D(z-a) + E(z-a)^{\frac{3}{2}} + \dots.$$

Es ist erlaubt, sich statt der Curve *DEFD* eines um den Punkt *A* mit dem sehr kleinen Radius ϱ beschriebenen Kreises zu bedienen, für dessen Umfang

$$z = a + \varrho e^{\tau i}$$

ist, woraus folgt

$$dz = i\varrho e^{\tau i}\, d\tau;$$

und für den über die Curve *DEFD* ausgedehnten Theil des Integrals $\int u_1 dz$ ergibt sich alsdann folgender Ausdruck:

$$i\left\{\begin{matrix} A\varrho^{\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi} e^{\frac{\tau i}{2}}\, d\tau + B\varrho\int_0^{2\pi} e^{\tau i}\, d\tau \\ + C\varrho^{\frac{3}{2}}\int_0^{2\pi} e^{\frac{3\tau i}{2}}\, d\tau + \dots \end{matrix}\right\}$$

$$= -4\left(A\varrho^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{3}C\varrho^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{5}E\varrho^{\frac{5}{2}} + \dots\right),$$

welcher eben beweist, dass dieses Integral verschwinden muss, sobald die Grösse ϱ zu Null herabsinkt. Auf ähnliche Weise liesse sich darthun, dass der auf die Curve *D'E'F'D'* bezügliche Theil des Integrals mit der räumlichen Ausdehnung dieser Curve gleichzeitig verschwindet und es folgt hieraus für unsern Fall, dass die Periode $A_1 + A'_2$ die Grenze von der Summe derjenigen Integraltheile ist, welche sich über die beiden Curven *DHD'* und *D'HD* erstrecken, sobald nämlich die Punkte *D* und *D'* bezüglich mit *A* und *A'* zusammenfallen. Da aber die Function u_1 bei der Fortbewe-

gung des Punktes Z auf der Curve DHD', um den Punkt A' herum und wieder über $D'HD$ zurück diejenigen Werthe, welche sie zuerst durchlief, das zweite Mal nicht wieder annimmt, sondern die in umgekehrter Ordnung, vom Punkte D aus folgenden Werthe der Function u_2 durchläuft; so ist die Summe der auf die Curven DHD' und $D'HD$ bezüglichen Theile des Integrals dem Integrale $\int(u_1 - u_2)dz$ gleich, wo die Integration über die Curve DHD' fortzuführen ist. Geht man nun zur Grenze über, so findet man, dass die Periode $A_1 + A'_2$ dem auf die Curve AHA' bezüglichen Werthe des Integrals $\int(u_1 - u_2)dz$ gleich ist.

In dem soeben behandelten Falle reducirt sich die Summe $A_1 + A_2$ auf Null, weil sie den Werth des über die Curve $DEFD$ ausgedehnten Integrals $\int(u_1 + u_2)dz$ darstellt. Wählt man nämlich für diese Curve den Kreis vom Radius ϱ, so hat man

$$u_1 + u_2 = 2\mathrm{B} + 2\mathrm{D}(z-a) + 2\mathrm{F}(z-a^2) + \ldots,$$

und folglich:

$$\int(u_1 + u_2)\,dz = 2i \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{B}\varrho \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\tau i}\,d\tau \\ + \mathrm{D}\varrho^2 \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{2\tau i} d\tau \\ + \mathrm{F}\varrho^3 \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{3\tau i}\,d\tau + \ldots \end{array} \right\} = 0.$$

Ganz in ähnlicher Weise ergibt sich, dass die Summe $A'_1 + A'_2$ ebenfalls gleich Null ist, so dass also die Perioden $A_1 + A_2$ und $A'_1 + A'_2$ verschwinden, während dagegen die Perioden $A_1 + A'_2$ und $A_2 + A'_1$, die einander gleich und mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftet sind, nur noch eine einzige ausmachen.

So oft die Anzahl der Punkte $A, A' A'', \ldots$ gerade, $2n$ ist, kommt die in Nr. 47 gemachte Bemerkung zur Anwendung. Beachten wir nämlich, dass für diesen Fall die Functionen u_1, u_2 beide nach einem Umlauf des Punktes Z auf der durch den Punkt C gehenden Curve Δ, welche zugleich die Punkte $A, A', A'', \ldots$, sämmtlich umgibt, wieder ihre Anfangswerthe erhalten, während

die Charakteristik $(\varDelta)$ dieser Curve aus zweierlei beliebig vermischten Termen, einerseits der Form $[+A^{(\sigma)}]$, andererseits der Form $[+\mathfrak{A}^{(\sigma)}]$ zusammengesetzt ist; lassen wir ausserdem die Elementar-Curven $(+A)$, $(+A')$, $(+A'')$,....., $[+A^{(2n-2)}]$, $[+A^{(2n-1)}]$, ganz abgesehen von den etwa dazwischen vorkommenden Termen der Form $[+\mathfrak{A}^{(\sigma)}]$, wieder in dieser Ordnung folgen, was stets erlaubt ist; und bezeichnen wir mit $[+\mathfrak{A}^{(\mu)}]$, $[+\mathfrak{A}^{(\mu')}]$, $[+\mathfrak{A}^{(\mu'')}]$, ... diejenigen Terme dieser Art, denen in der Charakteristik eine gerade Anzahl von Termen der Form $[+A^{(\sigma)}]$ vorangehen, und andererseits mit $[+\mathfrak{A}^{(\nu)}]$, $[+\mathfrak{A}^{(\nu')}]$, $[+\mathfrak{A}^{(\nu'')}]$,.... die Terme, welchen eine ungerade Anzahl der Form $[+A^{(\sigma)}]$ vorausgehen: so ergeben sich durch Anwendung der in Nr. 47 gewonnenen Gleichung auf jede der beiden Functionen u_1 und u_2 folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A}^{(\mu)}_1 + \mathfrak{A}^{(\mu')}_1 + \mathfrak{A}^{(\mu'')}_1 + \ldots + \mathfrak{A}^{(\nu)}_2 + \mathfrak{A}^{(\nu')}_2 + \mathfrak{A}^{(\nu'')}_2 + \ldots \\ &+ A_1 + A'_2 + A''_1 + A'''_2 + \ldots + A^{(2n-2)}_1 + A^{(2n-1)}_2 = 2\pi i \lambda_1, \\ &\mathfrak{A}^{(\mu)}_2 + \mathfrak{A}^{(\mu')}_2 + \mathfrak{A}^{(\mu'')}_2 + \ldots + \mathfrak{A}^{(\nu)}_1 + \mathfrak{A}^{(\nu')}_1 + \mathfrak{A}^{(\nu'')}_1 + \ldots \\ &+ A_2 + A'_1 + A''_2 + A'''_1 + \ldots + A^{(2n-2)}_2 + A^{(2n-1)}_1 = 2\pi i \lambda_2, \end{aligned}$$

wo λ_1 und λ_2 die Coefficienten von $\frac{1}{z}$ in den nach den absteigenden Potenzen von z fortschreitenden Entwickelungen von u_1 und u_2 bedeuten.

Diese Gleichungen, deren linke Seiten Summen von Perioden des oben aufgestellten vollständigen Systems sind, liefern nun, wenn λ_1 und λ_2 gleich Null gesetzt werden, die Werthe zweier von diesen Perioden, welche sich als die Summen mehrerer anderer, mit entgegengesetzten Vorzeichen versehener Perioden darstellen; hiermit ist aber die Anzahl der selbstständigen Perioden um zwei vermindert worden.

51. Wir wollen nun, um die bisher entwickelte Theorie wirklich auszuführen, einige specielle Fälle der nähern Betrachtung unterwerfen. Es sei zuerst folgende Gleichung zwischen u und z gegeben:

$$(z - a)u^2 = h^2,$$

wo h einen constanten Werth hat. Sofort lässt sich erkennen, dass die Functionen u_1, u_2 um den $z = a$ entsprechenden Punkt A ein cyklisches System bilden, und dass nur eine Periode des Integrals $\int_c^k u_1 dz$, nämlich von der Grösse $A_1 + A_2$ existiren kann, die geradezu den Werth des Integrals $\int (u_1 + u_2) dz$ für die Elementar-Curve $(+A)$ darstellt. Da nun der gegebenen Gleichung gemäss die Relation

$$u_1 + u_2 = 0$$

stattfindet, so gilt die Gleichung

$$A_1 + A_2 = 0,$$

d. h. die Periode selbst ist gleich Null, so dass dem Integral $\int_c^k u_1 dz$ bloss die beiden Werthe v_1 und $A_1 + v_2$ zukommen.

Zu denselben Folgerungen führt die Behandlung der Gleichung

$$u^2 = h^2 (z-a).$$

52. Wählen wir die Gleichung

$$(z-a)(z-a')u^2 = h^2,$$

so sind die beiden $z = a$ und $z = a'$ entsprechenden Punkte A und A' vorhanden, um welche jederseits die Functionen u_1 und u_2 eine cyklische Vertauschung eingehen. Die in Nr. 50 gegebenen allgemeinen Ausdrücke für die Perioden reduciren sich hier auf die vier Grössen:

$$A_1 + A_2, \; A_1 + A'_2, \; A_2 + A'_1, \; A'_1 + A'_2;$$

da aber zufolge der Relation

$$u_1 + u_2 = 0$$

die beiden Gleichungen gelten:

$$A_1 + A_2 = 0, \; A'_1 + A'_2 = 0,$$

so ist

$$A_2 + A'_1 = -(A_1 + A'_2),$$

d. h. es sind die vier Perioden der einen selbstständigen Periode $A_1 + A'_2$ äquivalent. Da das Product $(z-a)u_1$ für $z = a$, wie auch das Product $(z-a')u_1$ für $z = a'$ verschwindet, so kann die Periode $A_1 + A'_2$, nach einer in Nr. 50 gemachten Bemerkung, geradezu als der Werth des Integrals

$$\int_a^{a'} (u_1 - u_2) dz = 2\int_a^{a'} u_1 dz = 2h \int_a^{a'} \frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-a')}},$$

wo die Integrationen über die gerade Linie AA' auszudehnen sind, betrachtet werden. Setzen wir jetzt, um den Werth desselben zu erhalten,

$$z = \frac{a + a'}{2} + \frac{a - a'z'}{2}$$

ein, wo z' eine neue, etwa einem beweglichen Punkte Z' entsprechende Variable bezeichnet, und beachten wir, dass während die Integrationsgrenzen von z die Grössen a und a' sind, die von z' die Werthe -1 und $+1$ haben, und wenn der Punkt Z die Linie AA' durchläuft, der Punkt Z' den von den beiden Punkten $z' = -1$ und $z' = +1$ begrenzten Theil der x-Axe durchschreitet; so ergibt sich:

$$2h \int_a^{a'} \frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-a')}} = 2h \int_{-1}^{+1} \frac{dz'}{\sqrt{z'^2 - 1}} = \frac{2h}{i} \int_{-1}^{+1} \frac{dz'}{\sqrt{1 - z'^2}},$$

wo die Integrationen nach z' durch eine von -1 bis $+1$ aufsteigende Reihe reeller Werthe fortzuführen sind. Nun ist unter dieser Bedingung

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \pi,$$

folglich hat die einzige Periode des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ den Werth $\frac{2\pi h}{i}$ oder $-\frac{2\pi h}{i} = 2\pi i h$, weil die Aenderung des Vorzeichens einer Periode nichts ausmacht.

Man kann diese Periode auch dadurch erhalten, dass man die zum Schlusse der Nr. 50 ausgesprochene Bemerkung auf unsern Fall enwendet, wo die Anzahl der Perioden A, A' eine gerade ist. Da die Coefficienten von $\frac{1}{z}$ in den nach den absteigenden Potenzen von z fortschreitenden Entwickelungen von u_1 und

u_2 bezüglich $\pm h$ und $\mp h$ sind, so gehen die am angeführten Orte aufgestellten Gleichungen über in:

$$A_1 + A'_2 = \pm 2\pi i h, \quad A_2 + A'_1 = \mp 2\pi i h;$$

man findet also denselben Werth $\pm 2\pi i h$ für die Periode $A_1 + A'_2$ wieder.

Nimmt man z. B. an:

$$a = +1, \quad a' = -1, \quad h = +i,$$

also

$$u^2 = \frac{1}{1-z^2}$$

und setzt dann

$$\int_0^z u_1 dz = v,$$

wo u_1 diejenige der beiden Functionen vorstellt, deren Anfangswerth gleich $+1$ für $z = 0$ ist; so erscheinen die verschiedenen Werthe von v als die unendlich vielen Bögen, deren Sinus gleich z ist, d. h. man hat

$$z = \sin v.$$

Für diesen Fall reducirt sich die Periode $\pm 2\pi i h$ auf 2π, in vollkommener Uebereinstimmung mit der bekannten Gleichung

$$\sin(v + 2l\pi) = \sin v,$$

wo l jede ganze Zahl vertritt.

Hätten wir statt der Gleichung

$$(z-a)(z-a')u^2 = h^2$$

die Gleichung

$$u^2 = h^2(z-a)(z-a')$$

gewählt, so wäre auf entsprechende Weise für die einzige Periode des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ der Ausdruck

$$\frac{\pi h (a'-a)^2}{4} i$$

gefunden worden.

52. Wir gehen ferner zu der Gleichung

$$(z-a)(z-a')(z-a'')u^2 = h^2$$

über. Die allgemeine Methode führt zu folgenden neun als Perioden des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ auftretenden Grössen:

$$A_1+A_2,\ A_1+A'_2,\ A_1+A''_2,\ A_2+A'_1,\ A_2+A''_1,\ A'_1+A'_2,$$
$$A'_1+A''_2,\ A'_2+A''_1,\ A''_1+A''_2;$$

da aber, der Relation

$$u_1+u_2=0$$

gemäss, folgende Gleichungen gelten:

$$A_1+A_2=0,\ A'_1+A'_2=0,\ A''_1+A''_2=0,$$

so ist

$$A_1+A'_2=A_1-A'_1,\ A_1+A''_2=-(A''_1-A_1),\ A_2+A'_1=-(A_1-A'_1),$$
$$A_2+A''_1=A''_1-A_1,\ A'_1+A''_2=A'_1-A''_1,\ A'_2+A''_1=-(A'_1-A''_1),$$

so dass sich die oben genannten Perioden auf folgende drei reduciren:

$$A_1-A'_1,\ A'_1-A''_1,\ A''_1-A_1.$$

Da nun ferner die Summe dieser letztern gleich Null ist, so erhalten wir an Stelle derselben nur zwei selbstständige Perioden, wofür wir

$$A_1-A'_1,\ A_1-A''_1$$

oder auch nach Nr. 45:

$$A_1+A'_2,\ A_1+A''_2$$

wählen können.

Diese beiden Perioden sind nach Nr. 50 geradezu als die Werthe der Integrale $\int_a^{a'}(u_1-u_2)dz$, $\int_a^{a''}(u_1-u_2)dz$ in Bezug auf gewisse vom Punkte A nach den Punkten A' und A'' gehende Curven $AH'A'$, $AH''A''$ zu betrachten, wofür auch die geraden Linien AA', AA'' selbst genommen werden können, da man über die Curven CDA, $CD'A'$, $CD''A''$ (Fig. 12) derartige Bestimmungen zu treffen vermag, dass sich die Curven (A), (A'), (A'') mit ihnen allmälig zur Coincidenz bringen lassen. Will man nun diese Perioden durch andere Integrale ausdrücken, wo die Variable von der untern Grenze zur obern eine aufsteigende Reihe reeller Werthe durchläuft, so braucht man nur in dem ersteren Integrale

$$z=\frac{a+a'}{2}+\frac{a'-a}{2}z'$$

und in dem andern

$$z = \frac{a+a''}{2} + \frac{a''-a}{2} z''$$

einzusetzen, wo z' und z'' zwei neue Variabeln bezeichnen. Wenn wir dann unter dem Integralzeichen die Accente dieser letztern fortlassen, so erhalten wir für die beiden Perioden:

$$2h \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)\left(\frac{a+a'}{2} - a'' + \frac{a'-a}{2} z\right)}},$$

$$2h \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)\left(\frac{a+a''}{2} - a' + \frac{a''-a}{2} z\right)}}.$$

Wäre hierin z. B.

$$a = \frac{a'+a''}{2},$$

so würde eine dieser Perioden das Product aus der andern und i sein.

54. Ist die Funktion u durch folgende Gleichung definirt:

$$(z-a)(z-a')(z-a'')(z-a''')u^2 = h^2,$$

so finden wir zunächst durch Anwendung des allgemeinen Verfahrens folgende sechszehn Perioden:

$$A_1 + A_2,\ A_1 + A'_2,\ A_1 + A''_2,\ A_1 + A'''_2,$$
$$A_2 + A'_1,\ A_2 + A''_1,\ A_2 + A'''_1,\ A'_1 + A'_2,$$
$$A'_1 + A''_2,\ A'_1 + A'''_2,\ A'_2 + A''_1,\ A'_2 + A'''_1,$$
$$A''_1 + A''_2,\ A''_1 + A'''_2,\ A''_2 + A'''_1,\ A'''_1 + A'''_2,$$

welche sich jedoch wegen der Relation

$$u_1 + u_2 = 0$$

oder der hieraus entspringenden Gleichungen

$$A_1 + A_2 = 0,\ A'_1 + A'_2 = 0,\ A''_1 + A''_2 = 0,\ A'''_1 + A'''_2 = 0$$

auf folgende sechs Perioden reduciren:

$$A_1 - A'_1,\ A_1 - A''_1,\ A_1 - A'''_1,$$
$$A'_1 - A''_1,\ A'_1 = A'''_1,\ A''_1 - A'''_1.$$

Man sieht zwar, dass die vierte die Differenz der beiden ersten, die fünfte die Differenz der ersten und dritten, und die sechste die Differenz der zweiten und dritten ist, und könnte sich gleich hierdurch veranlasst sehen, von diesen Perioden nur die drei ersten:

$$A_1 - A'_1, \quad A_1 - A''_1, \quad A_1 - A'''_1$$

beizubehalten. Da indessen die Anzahl der Punkte A, A', A'', A''' eine gerade ist, so wollen wir hier die in Nr. 47 gemachte Bemerkung benutzen. Es seien diese Punkte in solcher Anordnung aufgeführt, dass die geschlossene Curve $(+A)(+A')(+A'')(+A''')$ ohne Ueberschreitung jener Punkte in einen Kreis verwandelt werden kann, dessen Centrum zum Anfangspunkte der Coordinaten dient, und welcher alle vier Punkte umgibt. Beachten wir nun, dass in den nach den absteigenden Potenzen von z fortschreitenden Entwickelungen von u_1 und u_2 der Term mit dem Argument $\frac{1}{z}$ nicht vorkommt, so gelten folgende Gleichungen:

$$A_1 + A'_2 + A''_1 + A'''_2 = 0, \quad A_2 + A'_1 + A''_2 + A'''_1 = 0,$$

welche sich wegen der Gleichungen

$$A_1 + A_2 = 0, \quad A'_1 + A'_2 = 0, \quad A''_1 + A''_2 = 0, \quad A'''_1 + A'''_2 = 0$$

zu der einen Gleichung

$$A_1 - A'_1 + A''_1 - A'''_1 = 0$$

oder

$$A_1 - A'''_1 = A_1 - A''_1 - (A_1 - A'_1)$$

gestalten, und es ist somit klar, dass von allen jenen Perioden entschieden nur zwei als selbstständige auftreten, nämlich:

$$A_1 - A'_1, \quad A_1 - A''_1$$

oder auch

$$A_1 + A'_2, \quad A_1 + A''_2.$$

Nun sind diese beiden Grössen wieder, wie in der vorigen Nummer, als die Werthe der Integrale $\int_a^{a'} (u_1 - u_2)dz$, $\int_a^{a''} (u_1 - u_2)dz$ oder, was dasselbe ist, $2\int_a^{a'} u_1 dz$, $2\int_a^{a''} u_1 dz$, wo sich die Integrationen bezüglich über die geraden Linien AA', AA'' erstrecken, zu betrachten.

Es wird zweckmässig sein, an die bisher gewonnenen Resultate die Betrachtung einiger bestimmten Beispiele zu knüpfen, wozu sich die ersten aus der Theorie der elliptischen Functionen bekannten Eigenschaften darbieten. Nehmen wir z. B. an:

$$(1-z^2)(1-k^2z^2)\,u^2 = 1\,,$$

wo k eine unter der Einheit liegende Zahl vorstellt; wählen wir dann den Anfangspunkt der Coordinaten zum Ausgangsorte von Z, nennen u_1 diejenige der beiden Functionen, welche den Anfangswerth $+1$ besitzt, und bezeichnen endlich mit A, A', A'', A''' die den Werthen $+1,\ +\frac{1}{k}\ -1,\ -\frac{1}{k}$ von z der Reihe nach entsprechenden Punkte: so können wir den Perioden des Integrals $\int_0^z u_1 dz$ die beiden Summen $A_1 + A'_2,\ A_1 + A''_2$, d. h.

$$2\int_{+1}^{+\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\,,\qquad 2\int_{+1}^{-1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

gleich setzen, wo sich die Integrationen bezüglich über die geraden Linien AA', AA'' erstrecken.

Von diesen zwei Perioden hat die erste folgenden reellen Werth:

$$4\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

und die zweite den imaginären Werth:

$$-2i\int_{+1}^{+\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\,,$$

welcher sich durch Substitution von

$$1-k^2 = k'^2,\quad z = \frac{1}{k}\sqrt{1-k'^2z'^2}$$

verwandelt in:

$$-2i\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Setzen wir nach dem Beispiele Jacobi's *)

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \mathrm{K}, \quad \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}} = \mathrm{K}',$$

wo z eine von Null bis Eins aufsteigende Reihe reeller Werthe durchlaufen soll, so erhalten wir für die beiden Perioden des Integrals $\int_0^z u_1 dz$ die Werthe 4K und $2i$K'.

Umgekehrt ergibt sich hieraus, wenn wir

$$\int_0^z u_1 dz = v$$

nehmen, wo also z als eine Function von v erscheint, die Jacobi mit sin am v bezeichnet hat, dass ohne eine Veränderung des Werthes von z beliebige ganze Vielfache von 4K und $2i$K' zu v addirt werden können; d. h. es ist, wie bekannt:

$$\sin \mathrm{am}\, (v + 4l\mathrm{K} + 2il'\mathrm{K}') = \sin \mathrm{am}\, v,$$

wo l und l' beliebige ganze Zahlen vertreten.

Führen wir durch Substitution von

$$1 - z^2 = x^2$$

eine andere neue Variable x ein, welche hier als die gewöhnlich mit cos am v bezeichnete Function von v auftritt, so nimmt die Differentialgleichung

$$dv^2 = u_1{}^2 dz^2 = \frac{dz^2}{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$$

folgende Gestalt an:

$$dv^2 = \frac{dx^2}{(1-x^2)(k'^2+k^2x^2)},$$

mithin ist

$$v = \int_1^x u'_1 dz,$$

*) *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum. Regiom.* 1829.

wo u'_1 eine Function von z vorstellt, welche der Gleichung

$$(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)u'^2 = 1$$

genügt. Beziehen wir nun, um unsere Theorie auf dieses Integral anzuwenden, die Punkte A, A', A'', A''' resp. auf die Werthe $+1$, $+\frac{k'}{k}i$, -1, $-\frac{k'}{k}i$ von z, so stellen $A_1 + A'_2$ und $A_1 + A''_2$ die beiden Perioden dar. Die erste ist dem Integral $2\int_1^{\frac{k'}{k}i} u'_1 dz$ für die Ausdehnung der geraden Linie AA' gleich, oder mit andern Worten, der Summe aus dem über die Linie AO fortgeführten Integrale $2\int_1^0 u'_1 dz$ und dem über die Linie OA' ausgedehnten Integrale $2\int_0^{\frac{k'}{k}i} u'_1 dz$, indem O zum Anfangspunkte der Coordinaten dient; es ist somit:

$$A_1 + A'_2 = 2\int_1^0 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}} + 2\int_0^{+\frac{k'}{k}i} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}};$$

Die hierin vorkommenden Integrale haben von Cauchy den Namen *geradlinige Integrale* erhalten. Wenn wir in dem ersten derselben

$$z = \sqrt{1-z'^2}$$

einsetzen und dann den Accent unterdrücken, so finden wir:

$$\int_1^0 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}} = -\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = -K;$$

und nehmen wir in dem zweiten

$$z = \frac{k'i}{k}\sqrt{1-z'^2},$$

so ergibt sich:

$$\int_0^{\frac{k'}{k}i} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}} = i\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}} = iK'.$$

Demnach ist:

$$A_1 + A'_2 = -2(\mathrm{K} - i\mathrm{K}').$$

Nun besitzt die zweite Periode $A_1 + A''_2$ den Werth des Integrals $2\int_{+1}^{-1} u'_1 dz$, über die gerade Linie AA'' ausgedehnt, folglich ist:

$$A_1 + A''_1 = 2\int_{+1}^{-1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}} = 4\int_{+1}^{0} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}}$$
$$= -4\mathrm{K},$$

so dass die beiden Perioden des Integrals $\int_1^z u'_1 dz$ durch die Grössen

$$4\mathrm{K},\ 2(\mathrm{K} - i\mathrm{K}')$$

dargestellt werden; somit gelangen wir zu der Fundamental-Eigenschaft der Function cos am v, welche sich in der Gleichung

$$\cos \mathrm{am}\, [v + 4l\mathrm{K} + 2l'(\mathrm{K} - i\mathrm{K}')] = \cos \mathrm{am}\, v$$

ausspricht.

Nehmen wir endlich an:

$$1 - k^2z^2 = y^2,$$

wo wiederum y eine neue Function von v bedeutet, die man mit Δ am v zu bezeichnen pflegt; so geht die Differentialgleichung

$$dv^2 = \frac{dz^2}{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$$

über in:

$$dv^2 = \frac{dy^2}{(1-y^2)(y^2-k'^2)},$$

mithin ist

$$v = \int_1^y u''_1 dz,$$

wo u''_1 eine Function von z vorstellt, welche der Gleichung:

$$(1-z^2)(z^2-k'^2)u''^2 = 1$$

Genüge leistet. Wenn wir jetzt die vier Punkte A, A', A'', A'' bezüglich den vier Werthen $+k'$, $+1$, $-k'$, -1 von z zuordnen, so stellen sich die Werthe der Perioden $A_1 + A'_2$, $A_1 + A''_2$ als folgende geradlinige Integrale dar:

$$2\int_{k'}^{1}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-k'^2)}},$$

$$2\int_{k'}^{-k'}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-k'^2)}} = -4\int_{0}^{k'}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-k'^2)}},$$

von denen jenes bei Substitution von

$$z=\sqrt{1-k^2z'^2}$$

folgende reelle erste Periode liefert:

$$2\int_{0}^{1}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = 2K,$$

und dieses bei Substitution von

$$z=k'z'$$

die imaginäre zweite Periode in der Gestalt:

$$4i\int_{0}^{1}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}} = 4iK'.$$

Da also das Integral $\int_1^y u''_1 dz$ die beiden Perioden

$$2K,\ 4iK'$$

besitzt, so gilt folgende aus der Theorie der elliptischen Functionen bekannte Formel:

$$\Delta \text{ am } (v+2lK+4il'K') = \Delta \text{ am } v.$$

Man sieht, dass die beiden Perioden

$$4K,\ 4iK'$$

den drei Functionen sin am v, cos am v und Δ am v gemeinschaftlich sind; dass $4iK'$ eine Periode von cos am v ist, zeigt die Gleichung

$$4K-2(2K-2iK') = 4iK'$$

an, und man hat überhaupt, wenn unter $\varphi(v)$ eine dieser Functionen oder eine aus ihnen zusammengesetzte rationale Function verstanden wird:

$$\varphi(v+4lK+4il'K') = \varphi(v).$$

55. Die drei Perioden

$$A_1 - A'_1,\ A_1 - A''_1,\ A_1 - A'''_1$$

sind in der vorstehenden Nummer mit Hilfe der Gleichung

$$A_1 - A'_1 + A''_1 - A'''_1 = 0$$

auf zwei reducirt worden; allein diese Reduction ist in dem Falle, wenn die Function u_1 durch die Gleichung

$$(z-a)(z-a')(z-a'')(z-a''')u^2 - \mathrm{H}^2 = 0$$

definirt ist, wo H ein ganzes, durch keinen der vier Factoren $z-a$, $z-a'$, $z-a''$, $z-a'''$ theilbares Polynom von z bezeichnet, im Allgemeinen nicht ausführbar. Bei der Berechnung der Perioden des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ kommen zwar die Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \ldots$, welche solchen Werthen von z entsprechen, für die das Polynom H verschwindet, gar nicht in Betracht, weil jede der Functionen u_1 und u_2 nach einem Umlauf von Z auf irgend einer der Elementar-Curven $(\mathfrak{A}), (\mathfrak{A}'), (\mathfrak{A}''), \ldots$ ihren Anfangswerth wieder annimmt und die entsprechenden Elementar-Integrale sämmtlich Null sind; man findet also wie früher, dass das Integral $\int_c^k u_1 dz$ die drei Perioden

$$A_1 - A'_1 = p',\ A_1 - A''_1 = p'',\ A_1 - A'''_1 = p'''$$

besitzt, während A, A', A'', A''' die Punkte bezeichnen, für welche z bezüglich die Werthe a, a', a'', a''' hat. Wenn man sich aber des um den Anfangspunkt der Coordinaten beschriebenen, die Punkte $A, A', A'', A''', \mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \ldots$ sämmtlich umgebenden Kreises bedient, so gelangt man zu der Gleichung

$$A_1 - A'_1 + A''_1 - A'''_1 = 2\pi i\lambda$$

oder

$$p' - p'' + p''' = 2\pi i\lambda,$$

wo λ den Coefficienten von $\frac{1}{z}$ in der nach den absteigenden Potenzen von z fortschreitenden Entwickelung des Bruchs

$$\frac{\mathrm{H}}{\sqrt{(z-a)(z-a')(z-a'')(z-a''')}}$$

bezeichnet. So lange sich das Polynom H nicht auf einen con-

stanten Werth reducirt, ist der Coefficient λ, wenigstens im Allgemeinen, nicht gleich Null, und daher müssen die Perioden p', p'', p''' selbstständige sein, können jedoch in besondern Fällen eine Verminderung auf zwei erleiden.

56. Wir wollen gegenwärtig den allgemeinern Fall untersuchen, wenn die Function u durch die Gleichung

$$(z-a)(z-a')(z-a'')\ldots.[z-a^{(n-1)}]u^2-h^2=0$$

definirt ist, wo h einen constanten Werth besitzt und unter a, a', $a'', \ldots., a^{(n-1)}$ durchweg verschiedene Grössen verstanden werden sollen. Es lässt sich hier ohne Mühe erkennen, dass das Integral $\int_c^{,k} u_1 dz$ folgende $n-1$ selbstständige Perioden hat:

$$A_1-A'_1=p',\ A_1-A''_1=p'', \ldots., A_1-A_1^{(n-1)}=p^{(n-1)},$$

welche für einen ungeraden Zahlenwerth von n einer Reduction überhaupt nicht fähig sind, während, wenn die Zahl n gerade ist, mit Hilfe des um alle Punkte $A, A', A'', \ldots.$ beschriebenen Kreises ausserdem die Gleichung

$$A_1-A'_1+A''_1-A'''_1+\ldots.+A^{(n-2)}_1-A^{(n-1)}_1=0$$

oder

$$p'-p''+p'''-\ldots.+p^{n-1}=0$$

gewonnen wird, so dass in diesem Falle nur $n-2$ selbstständige Perioden

$$p', p'', p''', \ldots., p^{(n-2)}$$

zur Geltung kommen. Wir können daher auch sagen, es sind, wenn die Anzahl der Grössen $a, a', a'', \ldots.$ gleich $2n+1$ oder $2n+2$ ist, $2n$ selbstständige Perioden vorhanden, wovon jedoch der Fall eine Ausnahme bildet, wo jene Anzahl 2 ist, weil alsdann nur eine Periode existirt.

Was nun die Werthe dieser Perioden $p', p'', p''', \ldots.$ selbst betrifft, so stellen sich dieselben geradezu als die Werthe des Integrals

$$\int(u_1-u_2)dz=2\int u_1 dz$$

dar, wo sich die Integration über jede der geraden Linien AA', AA'', AA''',.... erstreckt.

57. Wir wollen einen Augenblick bei dem Falle verweilen, wenn in der Gleichung

$$(z-a)(z-a')(z-a'')\ldots.[z-a^{(n-1)}]u^2-H^2=0$$

die Zahl n gerade ist und H ein ganzes, durch keinen der Factoren $z-a$, $z-a'$, $z-a''$,.... theilbares Polynom von z bezeichnet. Auch hier kommen aus dem in Nr. 55 angeführten Grunde bei der Berechnung der Perioden des Integrals $\int_c^k u_1\,dz$ die Werthe von z, für welche das Polynom H verschwindet, nicht in Betracht, und man hat wie am genannten Orte für dieselben folgende $n-1$ Werthe:

$$A_1-A'_1=p',\ A_1-A''_1=p'',\ldots.,\ A_1-A^{(n-1)}_1=p^{(n-1)}.$$

Während sich jedoch früher die Verminderung der Zahl der selbstständigen Perioden auf die Gleichung

$$p'-p''+p'''-\ldots.+p^{(n-1)}=0$$

gründete, tritt nach Nr. 50 in unserm Falle die Gleichung

$$p'-p''+p'''-\ldots.+p^{(n-1)}=2\pi i\lambda$$

dafür ein, wo λ den Coefficienten von $\frac{1}{z}$ in der nach den absteigenden Potenzen von z fortschreitenden Reihenentwickelung des Bruchs

$$\frac{H}{\sqrt{(z-a)(z-a')\ldots.[z-a^{(n-1)}]}}$$

bedeutet, so dass die $n-1$ Perioden überhaupt, so lange λ von Null verschieden ist, den Charakter der Selbstständigkeit besitzen.

Die Fälle, in welchen der Coefficient λ gleich Null ist, sind folgende:

1) wo der Grad des Polynoms H kleiner als $\frac{n}{2}-1$ ist; hierhin gehört z. B. das nur vierfach-periodische Integral

$$\int_c^k \frac{(\alpha+\beta z)\,dz}{\sqrt{P}}$$

worin P ein Polynom sechsten Grades von z vorstellt;

durch Grössen von der Form

$$gp + hq + kr + ls\,,\quad gp' + hq' + kr' + ls'$$

dargestellt werden. Da hier also die Werthe der Grössen z und z' oder, was eben so viel ist, der Functionen $\varphi(v, v')$, $\varphi'(v, v')$ ungeändert bleiben, so können wir zu der Variabeln v die Grösse

$$gp + hq + kr + ls$$

hinzufügen, wofern gleichzeitig die Variable v' den Zuwachs

$$gp' + hq' + kr' + ls'$$

erleidet. Demnach finden folgende zwei Gleichungen statt:

$$\varphi(v + gp + hq + kr + ls,\ v' + gp' + hq' + kr' + ls') = \varphi(v, v')\,,$$
$$\varphi'(v + gp + hq + kr + ls,\ v' + gp' + hq' + kr' + ls') = \varphi'(v, v')\,.$$

Somit erblicken wir in den Functionen φ und φ' den Charakter der vierfachen Periodicität wieder, dessen Entdeckung schon Jacobi*) im Jahre 1835 gemacht hat. Zur Kenntniss der Perioden $p, q, r, s, p', q', r', s'$ selber gelangen wir auf folgende Weise. Bezeichnen A, A', A'', A''', A^{IV} die auf die Elementar-Curven $(+A), (+A'), (+A''), (+A''')\,(+A^{IV})$ bezüglichen Werthe des Integrals $\int u dz$ und A_1, A'_1, A''_1, A'''_1, A^{IV}_1 die Werthe des Integrals $\int u' dz$ für dieselben Curven, so erhalten jene Perioden folgende Werthe:

$$p = A - A',\ q = A - A'',\ r = A - A''',\ s = A - A^{IV},$$
$$p' = A_1 - A'_1,\ q' = A_1 - A''_1,\ r' = A_1 - A'''_1,\ s' = A_1 - A^{IV}_1,$$

so dass wir auch hier wieder sagen können, die Perioden, p, q, r, s sind den Werthen des Integrals $2\int u dz$ in Bezug auf die geraden Verbindungslinien AA', AA'', AA''' AA^{IV} und andererseits, die Perioden p', q', r', s' sind den Werthen des Integrals $2\int u' dz$, auf dieselben Linien bezogen, gleich.

Die vorstehende Betrachtung lässt sich sogleich auf den Fall erweitern, wenn mehrere Functionen gleichzeitig gegeben sind. Es

---

*) Crelle's Journal, Bd 13, S. 55: *De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur.*

seien nämlich a, a', a'',.... beliebige ungleiche Grössen, deren Anzahl $2m$ oder $2m-1$ sein mag; ferner bezeichnen u, u',...., $u^{(m-2)}$ Functionen von z, welche beziehungsweise folgenden Gleichungen zweiten Grades Genüge leisten:

$$(z-a)(z-a')(z-a'')\ldots\, u^2-(\alpha+\beta z+\ldots+\varepsilon z^{m-2})^2=0,$$
$$(z-a)(z-a')(z-a'')\ldots\, u'^2-(\alpha'+\beta' z+\ldots+\varepsilon' z^{m-2})^2=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(z-a)(z-a')(z-a'')\ldots\, u^{(m-2)2}-[\alpha^{(m-2)}+\beta^{(m-2)}z+\ldots$$
$$+\varepsilon^{(m-2)}z^{m-2}]^2=0.$$

Setzen wir nun:

$$\int_c^z u\,dz+\int_{c'}^{z'} u\,dz+\ldots+\int_{c^{(m-2)}}^{z^{(m-2)}} u\,dz=v,$$
$$\int_c^z u'dz+\int_{c'}^{z'} u'dz+\ldots+\int_{c^{(m-2)}}^{z^{(m-2)}} u'dz=v',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\int_c^z u^{(m-2)}dz+\int_{c'}^{z'} u^{(m-2)}dz+\ldots+\int_{c^{(m-2)}}^{z^{(m-2)}} u^{(m-2)}dz=v^{(m-2)},$$

wo sich die Integrationen zwischen den Grenzen c und z sämmtlich über eine und dieselbe Curve CMZ, die zwischen den Grenzen c' und z' genommenen auch sämmtlich über eine und dieselbe Curve $C'M'Z'$, u. s. f. erstrecken; so können wir z, z',...., $z^{(m-2)}$ als Functionen von v, v',...., $v^{(m-2)}$ ansehen, also schreiben:

$$z=\varphi[v, v', \ldots, v^{(m-2)}],\quad z'=\varphi'[v, v', \ldots, v^{(m-2)}], \ldots,$$
$$z^{(m-2)}=\varphi^{(m-2)}[v, v', \ldots, v^{(m-2)}].$$

Stellen dann p, q,...., t die $2m-2$ Perioden des Integrals $\int_c^z u\,dz$ vor, ferner p', q',..., t' die des Integrals $\int_c^z u'dz$, u. s. f., so lässt sich wie vorhin darthun, dass für jede der Functionen φ, φ',...., $\varphi^{(m-2)}$ folgende Gleichung stattfindet:

$$\varphi^{(k)}\begin{bmatrix} v+gp+hq+\ldots+lt, \\ v'+gp'+hq'+\ldots+lt', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ v^{(m-2)}+gp^{(m-2)}+hq^{(m-2)}+\ldots+lt^{(m-2)} \end{bmatrix}=\varphi^{(k)}[v, v', \ldots, v^{(m-2)}],$$

wo g, h, ... l beliebige ganze Zahlen bedeuten. Was nun die Perioden p, q, ..., t, p', q', ..., t' betrifft, so gelangen wir auf dieselbe Art zur Kenntniss derselben, wie früher. Sind nämlich, der obigen Bezeichnungsweise entsprechend, A, A', A'', ... die über die Elementar-Curven $(+A)$, $(+A')$, $(+A'')$, ... genommenen Werthe des Integrals $\int u dz$, ferner A_1, A'_1, A''_1, ... die Werthe des Integrals $\int u' dz$, auf dieselben Curven bezogen, dann A_{11}, A'_{11}, A''_{11}, ... die des Integrals $\int u'' dz$, u. s. f.; so dienen zur Darstellung der Perioden folgende Grössen:

$$p = A - A',\ q = A - A'',\ \ldots,\ t = A - A^{(2m-2)},$$
$$p' = A_1 - A'_1,\ q' = A_1 - A''_1,\ \ldots,\ t' = A_1 - A_1^{(2m-2)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p^{(2m-2)} = A_{(2m-2)} - A'_{(2m-2)},\ q^{(2m-2)} = A_{(2m-2)} - A''_{(2m-2)},\ \ldots,$$
$$t^{(2m-2)} = A_{(2m-2)} - A^{(2m-2)}_{(2m-2)},$$

und folglich erscheinen die Perioden p, q, ... t als die Werthe des Integrals $2\int u dz$ in Bezug auf die geraden Verbindungslinien AA', AA'', ..., $AA^{(2m-2)}$, die Perioden p', q', ..., t' als die Werthe des Integrals $2\int u' dz$, über dieselben Linien ausgedehnt, u. s. f.

59. Wir verlassen jetzt das Gebiet der Gleichungen zweiten Grades und wenden uns zu der Ermittelung der Anzahl und Werthe der Perioden des Integrals $\int_c^k u dz$ für den Fall, dass die Function u durch eine Gleichung von höherem Grade definirt ist. Als Beispiel wählen wir die binomische Gleichung:

$$(z-a)(z-a')\ldots[z-a^{(n-1)}]\, u^m - \mathrm{H}^m = 0,$$

wo a, a', ..., $a^{(n-1)}$ lauter ungleiche Grössen und H ein ganzes, durch keinen der Factoren $z-a$, $z-a'$, ..., $z-a^{(n-1)}$ theilbares Polynom von z bezeichnen. Bei der Berechnung der einzelnen Werthe des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ können wir die Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, ..., welche solchen Werthen von z entsprechen, für die das Polynom H verschwindet, ganz ausser Acht lassen, weil jede der Functionen

u_1, u_2,.... ihren Anfangswerth wieder annimmt, sobald der Punkt Z auf der um einen jener Punkte gezogenen Elementar-Curve einen Umlauf gemacht hat, und alsdann die Elementar-Integrale für eine solche Curve sämmtlich Null sind. Es seien nun $A, A', \ldots, A^{(n-1)}$ die den Werthen $a, a', \ldots, a^{(n-1)}$ von z bezüglich entsprechenden Punkte, welche wir der Art angeordnet voraussetzen wollen, was uns gestattet ist, dass sich jede geschlossene Curve, deren Charakteristik

$$(+A)(+A')\ldots[+A^{(n-1)}]$$

ist, ohne Ueberschreitung eines der genannten Punkte mit einem solchen Kreise zur Coincidenz bringen lässt, dessen Centrum im Anfangspunkte der Coordinaten liegt, und welcher dieselben Punkte sämmtlich umgibt.

Der Kürze wegen setzen wir

$$A_1 - A'_1 = p'_1,\ A_2 - A'_2 = p'_2, \ldots, A_m - A'_m = p'_m,$$
$$A_1 - A''_1 = p''_1,\ A_2 - A''_2 = p''_2, \ldots, A_m - A''_m = p''_m,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_1 - A_1^{(n-1)} = p_1^{(n-1)},\ A_2 - A_2^{(n-1)} = p_2^{(n-1)}, \ldots,$$
$$A_m - A_m^{(n-1)} = p_m^{(n-1)},$$

überhaupt also, wenn unter q, r, s ganze Zahlen verstanden werden:

$$\overset{(q)}{A_s} - \overset{(r)}{A_s} = \overset{(r)}{p_s} - \overset{(q)}{p_s};$$

ferner nehmen wir gleich eine solche Anordnung der Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ an, dass jede derselben nach vollbrachtem Umlauf von Z auf irgend einer der Curven $(+A)$, $(+A')$,...., $[+A^{(n-1)}]$ den Anfangswerth der folgenden erhält, d. h. wir nehmen

$$u_2 = e^{-\frac{2\pi i}{m}} u_1,\ u_3 = e^{-\frac{4\pi i}{m}} u_1, \ldots, u_m = e^{-\frac{(m-1).2\pi i}{m}} u_1,$$

wo auch jede dieser Functionen den Anfangswerth der vorhergehenden erhält, sobald der Punkt Z auf einer der Curven $(-A)$, $(-A')$...... $[-A^{(n-1)}]$ einmal herumgeführt ist, d. h. es gelten die Gleichungen:

$$\overset{(\sigma)}{A}_{-1} = -\overset{(\sigma)}{A}_m\,,\quad \overset{(\sigma)}{A}_{-2} = -\overset{(\sigma)}{A}_1\,,\quad \overset{(\sigma)}{A}_{-3} = -\overset{(\sigma)}{A}_2\,,\ldots\ldots,$$
$$\overset{(\sigma)}{A}_{-m} = -\overset{(\sigma)}{A}_{m-1};$$

endlich seien v_1, $v_2,\ldots\ldots, v_m$ die Werthe der Integrale $\int_c^k u_1 dz$, $\int_c^k u_2 dz,\ldots\ldots, \int_c^k u_m dz$, welche einer bestimmten Curve *CMK* ent- entsprechen.

Die gegenwärtig zu behandelnde Aufgabe besteht nun darin, alle möglichen Werthe des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ durch allgemeine Ausdrücke darzustellen, wenn sich die Integration über Curven jeder Art erstreckt.

Sobald die Charakteristik einer Integrations-Curve *CLK* gegeben ist, unterliegt es keinen Schwierigkeiten, den entsprechenden Werth des Integrals zu ermitteln; denn jeder Term $[+A^{(q)}]$ der Charakteristik hat in dem Ausdrucke des Integrals seinen correspondirenden Term von der Form $+\overset{(q)}{A}_f$, jeder Term $[-A^{(q)}]$ der Charakteristik seinen correspondirenden Term von der Form $-\overset{(q)}{A}_f$, und überdiess ist dem letzten Term *CMK* der Charakteristik ein Term des Integrals, etwa v_g, zugeordnet, wo dann die Indices f und g als ganze positive Zahlen folgendermassen bestimmt sind: 1) je nachdem der erste Term des Integrals mit dem Plus- oder Minuszeichen versehen ist, besitzt derselbe den Index 1 oder m; 2) gehört zwei auf einander folgenden Termen das Pluszeichen an, so übersteigt der Index des zweiten Terms den des ersten um Eins; 3) dahingegen übersteigt der Index des ersten Terms den des zweiten um Eins, falls beide Terme mit dem Minuszeichen erscheinen*); 4) endlich sind die Indices beider Terme einander gleich, wenn die Vorzeichen derselben entgegengesetzt sind.

---

*) Es versteht sich hier von selbst, dass man statt den Index m um Eins zu vergrössern, dafür 1 selbst nehmen muss, während statt einer Verkleinerung des Index 1 um Eins dafür m eintritt.

Wir wollen der Deutlichkeit wegen von der Annahme ausgehen, dass die Anzahl der positiven Terme der Charakteristik für die Curve *CLK* grösser sei, als die der negativen, alsdann gilt dasselbe auch für den Ausdruck des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ selbst. Zerlegen wir nun diesen Ausdruck von links nach rechts der Art, dass in jedem der abgesonderten Theile die Anzahl der positiven Terme die der negativen um m Einheiten übersteigt, nur den letzten Theil ausgenommen, wo der Unterschied dieser beiden Zahlen kleiner sein kann, als m ist; so hat irgend einer jener Theile mit Ausnahme des letzten einen Werth, welcher durch Addition der Summe

$$A_1 + A_2 + \dots + A_m$$

zu einer gewissen Anzahl von Differenzen der Form $\overset{(s)}{A_q} - \overset{(s)}{A_r}$ erhalten wird. Weil nun aber die Gleichung

$$u_1 + u_2 + \dots + u_m = 0$$

folgende nach sich zieht:

$$A_1 + A_2 + \dots + A_m = 0,$$

so reducirt sich der betrachtete Theil auf eine Summe von solchen Differenzen $\overset{(s)}{A_q} - \overset{(s)}{A_r}$ und kann mithin durch die Formel

$$\begin{aligned} w = {} & l'_1 p'_1 + l''_1 p''_1 + \dots + l_1^{(n-1)} p_1^{(n-1)} \\ & + l'_2 p'_2 + l''_2 p''_2 + \dots + l_2^{(n-1)} p_2^{(n-1)} \\ & + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ & + l'_m p'_m + l''_m p''_m + \dots + l_m^{(n-1)} p_m^{(n-1)} \end{aligned}$$

dargestellt werden, wo die Buchstaben l'_1, l''_1, ..., $l_1^{(n-1)}$, l'_2, ... lauter ganze positive oder negative Zahlen von ganz beliebigem Werthe, selbst Null nicht ausgeschlossen, bezeichnen. Ganz entsprechende Ausdrücke gelten natürlich für die übrigen Theile des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ mit Ausschluss des letzten, welcher, wie sich ohne Weiteres ergibt, bis auf eine Grösse der Form von w, immer einen der folgenden Werthe besitzt:

$$v_1,$$
$$A_1+v_2,$$
$$A_1+A_2+v_3,$$
$$A_1+A_2+A_3+v_4,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$A_1+A_2+\ldots.+A_{m-1}+v_m.$$

Somit sind alle möglichen Werthe des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ für alle Arten von Integrations-Curven zwischen C und K in folgenden m Formeln enthalten:

$$w+v_1,$$
$$w+A_1+v_2,$$
$$w+A_1+A_2+v_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$w+A_1+A_2+\ldots.+A_{m-1}+v_m.$$

Wir gingen zwar von der Annahme aus, dass die Zahl der positiven Terme in dem Ausdrucke des Integrals, welches sich über die Curve CLK erstreckte, grösser als die der negativen sei; es lässt sich indessen der entgegengesetzte Fall auf jenen zurückführen, wenn man bedenkt, dass zu dem in Rede stehenden Ausdrucke die Grösse $A_1+A_2+\ldots.+A_m$, die gleich Null ist, beliebig vielmal hinzugefügt werden kann, und so gelangt man auch hier wieder zu den nämlichen Resultaten.

Die vorstehende Untersuchung lässt also deutlich erkennen, dass die Grössen $p'_1, p''_1, \ldots.., p_1^{(n-1)}, p'_2, \ldots.., p_2^{(n-1)}, \ldots..,$ $p'_m, \ldots.., p_m^{(n-1)}$ lauter Perioden des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ sind, und zugleich noch, dass jede andere Periode desselben aus jenen zusammengesetzt ist; man wird daher durch Addition beliebiger ganzen Vielfachen dieser Perioden zu m passend gewählten Werthen des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ jeden der unendlich vielen Werthe desselben erlangen.

Wir wollen, um den Werth einer Periode zu erhalten, die

bestimmte Periode $p'_f = A_f - A'_f = A_f + A'_{-(f+1)}$ ins Auge fassen. Zunächst ist dieselbe offenbar gleich dem Werthe des Integrals $\int u_f dz$, über die geschlossene Curve $(+A)(-A')$ ausgedehnt, und ausserdem, weil die Function u_f nach einem Umlauf von Z auf dieser Curve ihren Anfangswerth wieder annimmt, von der Lage des Punktes C unabhängig (Nr. 11). Da wir aber die Curve $(+A)$ $(-A')$ mit einer Zusammensetzung aus der Curve $D'HD$ (Fig. 25), der unendlich kleinen geschlossenen Curve $DFED$ (im directen Sinne genommen), der Curve DHD' (im umgekehrten Sinne genommen) und schliesslich der unendlich kleinen geschlossenen Curve $D'F'E'D'$ ohne Ueberschreitung eines der Punkte $A, A', A'', \ldots.$ zur Coincidenz bringen können, so wird unsere Periode p'_f auch den Werth des Integrals $\int u_f dz$ mit Zugrundelegung dieser zusammengesetzten Integrations-Curve besitzen. Beachten wir nun, dass das Product $(z-a)u_f$ für $z=a$ und das Product $(z-a')u_f$ für $z=a'$ verschwinden, so haben die über die unendlich kleinen Curven $DEFD$ und $D'F'E'D'$ ausgedehnten Theile des Integrals, wie es uns schon in Nr. 50 begegnete, beide Null zur Grenze, und somit erscheint p'_f als die Grenze von der Summe der über die Curven $D'HD$, DHD' fortgeführten Theile des Integrals, so dass wir auch sagen können, die Periode p'_f hat den Werth des Integrals $\int (u_f - u_{f+1}) dz$ in Bezug auf die Curve $A'HA$.

Dasselbe, was hier die Periode p'_f betraf, gilt eben so auch für jede andere, und es ergibt sich daher, dass die Werthe der Integrale $\int (u_1 - u_2) dz$, $\int (u_2 - u_3) dz, \ldots.,$ $\int (u_m - u_1) dz$ die Perioden selbst sind, indem sich die Integrationen über die geraden Verbindungslinien AA', $AA'', \ldots.,$ $AA^{(n-1)}$ erstrecken.

Zwischen den $m(n-1)$ Grössen $p'_1, p''_1, \ldots., p_m^{(n-1)}$, finden eine Anzahl direct aufzuweisende Beziehungen statt. Da nämlich, wie bereits erwähnt ist,

$$u_1 + u_2 + \ldots. + u_m = 0$$

ist, so hat man die Gleichungen:

$$A_1 + A_2 + \dots + A_m = 0,$$
$$A'_1 + A'_2 + \dots + A'_m = 0,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$A_1^{(n-1)} + A_2^{(n-1)} + \dots + A_m^{(n-1)} = 0,$$

oder:

$$p'_1 + p'_2 + \dots + p'_m = 0,$$
$$p''_1 + p''_2 + \dots + p''_m = 0,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$p_1^{(n-1)} + p_2^{(n-1)} + \dots + p_m^{(n-1)} = 0,$$

woraus eben hervorgeht, dass sich jede der $n-1$ Perioden p'_m, $p''_m, \dots, p_m^{(n-1)}$ durch die mit entgegengesetztem Vorzeichen genommene Summe von $m-1$ andern ausdrücken lässt, dass also die Anzahl der selbstständigen Perioden eine Reduction auf $(m-1)(n-1)$ erleidet.

Berücksichtigen wir nun, dass die Perioden

$$p'_1, p'_2, \dots, p'_m$$

dem Werthe nach bezüglich mit den Integralen

$$\int (u_1 - u_2) dz, \int (u_2 - u_3) dz, \dots, \int (u_m - u_1) dz$$

übereinstimmen, wo die Integrationen über eine und dieselbe vom Punkte A' nach dem Punkte A gehende gerade Linie fortzuführen sind, und dass überdiess folgende Gleichungen stattfinden:

$$u_2 = e^{-\frac{2\pi i}{m}} u_1, \quad u_3 = e^{-\frac{4\pi i}{m}} u_1, \dots, u_m = e^{-\frac{(m-1) \cdot 2\pi i}{m}} u_1;$$

so ergeben sich für die Perioden

$$p'_1, p'_2, \dots, p'_m$$

folgende Werthe:

$$\left(1 - e^{-\frac{2\pi i}{m}}\right) \int u_1 dz, \quad e^{-\frac{2\pi i}{m}} \left(1 - e^{-\frac{2\pi i}{m}}\right) \int u_1 dz,$$
$$e^{-\frac{4\pi i}{m}} \left(1 - e^{-\frac{2\pi i}{m}}\right) \int u_1 dz, \dots, e^{-\frac{(m-1) \cdot 2\pi i}{m}} \left(1 - e^{-\frac{2\pi i}{m}}\right) \int u_1 dz,$$

wo sich die Integrale über eine und dieselbe grade Linie $A'A$ erstrecken, und somit ist:

$$p'_2 = e^{-\frac{2\pi_i}{m}} p'_1, \; p'_3 = e^{-\frac{4\pi_i}{m}} p'_1, \ldots, \; p'_m = e^{-\frac{(m-1).2\pi_i}{m}} p'_1.$$

Für die übrigen Perioden finden wir ganz ähnlich die Relationen:

$$p''_2 = e^{-\frac{2\pi_i}{m}} p''_1, \; p''_3 = e^{-\frac{4\pi_i}{m}} p''_1, \ldots, \; p''_m = e^{-\frac{(m-1).2\pi_i}{m}} p''_1,$$

. . . .

$$p_2^{(n-1)} = e^{-\frac{2\pi_i}{m}} p_1^{(n-1)}, \quad p_3^{(n-1)} = e^{-\frac{4\pi_i}{m}} p_1^{(n-1)}, \ldots,$$

$$p_m^{(n-1)} = e^{-\frac{(m-1).2\pi_i}{m}} p_1^{(n-1)},$$

aus welchen wiederum nur die vorhin aufgestellten Gleichungen

$$p'_1 + p'_2 + \ldots + p'_m = 0,$$
$$p''_1 + p''_2 + \ldots + p''_m = 0,$$

. . . .

und keine neuen zu entnehmen sind, in denen sich eine fernere Verminderung der Anzahl selbstständiger Perioden ausspräche. Nehmen wir den speciellen Fall an, dass die Anzahl n der Grössen $a, a', a'', \ldots$ einem Vielfachen von m gleich ist, so erhält jede der Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ nach einem Umlauf von Z auf einer die Punkte $A, A', A'', \ldots$ sämmtlich umgebenden geschlossenen Curve wieder ihren Anfangswerth; und es bietet sich dann die in Nr. 47 gemachte Bemerkung für jede der Functionen dar. Bezeichnet nämlich λ den Coefficienten von $\frac{1}{z}$ in der nach den absteigenden Potenzen von z fortschreitenden Entwickelung des Bruchs

$$\frac{\mathrm{H}}{\sqrt[m]{(z-a)(z-a')\ldots[z-a^{(n-1)}]}},$$

so ergeben sich die Gleichungen:

$$A_1 + A'_2 + A''_3 + \ldots + A_m^{(n-1)} = 2\pi i\lambda,$$

$$A_2 + A'_3 + A''_4 + \ldots + A_1^{(n-1)} = 2\pi i\lambda e^{-\frac{2\pi_i}{m}},$$

$$A_3 + A'_4 + A''_5 + \ldots + A_2^{(n-1)} = 2\pi i\lambda e^{-\frac{4\pi_i}{m}},$$

. . . .

$$A_m + A'_1 + A''_2 + \ldots + A_{m-1}^{(n-1)} = 2\pi i\lambda e^{-\frac{(m-1).2\pi_i}{m}},$$

und demnach ist

$$p'_2+p''_3+p'''_4+\ldots+p^{(n-1)}_m=-2\pi i\lambda,$$

$$p'_3+p''_4+p'''_5+\ldots+p^{(n-1)}_1=-2\pi i\lambda e^{-\frac{2\pi}{m}i},$$

$$p'_4+p''_5+p'''_6+\ldots+p^{(n-1)}_2=-2\pi i\lambda e^{-\frac{4\pi}{m}i},$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$p'_1+p''_2+p'''_3+\ldots+p^{(n-1)}_{m-1}=-2\pi i\lambda e^{-\frac{(m-1).2\pi}{m}i}.$$

Die Anzahl m dieser Gleichungen wird nun vermöge der schon früher aufgestellten Relationen zwischen den Perioden auf $m-1$ wesentlich verschiedene reducirt, und wir finden auch in der That, dass das Resultat der Addition aller Gleichungen $0=0$ ist. Wenn ausserdem der Coefficient λ gleich Null ist, so lassen sich $m-1$ Perioden durch eben so viele mit entgegengesetzten Vorzeichen genommene Summen mehrerer anderer ausdrücken, also die $(m-1)(n-1)$ selbstständigen Perioden auf $(m-1)(n-2)$ reduciren, ein Umstand, welcher in dem speciellen Falle eintritt, wenn der Grad des Polynoms H kleiner als die ganze Zahl $\frac{n}{m}-1$ ist.

Wir können leicht ermitteln, welche Perioden in diesen verschiedenen Fällen als selbstständige auftreten. Wenn sich nämlich n durch m theilen lässt, oder wenn λ, falls n einem Vielfachen von m gleich ist, einen beliebigen Werth besitzt, so fallen die Perioden p'_m, p''_1, p'''_2, ... fort, da die Gleichungen:

$$p'_m=-p'_1-p'_2-p'_3-\ldots,$$

$$p''_1=-p''_2-p''_3-p''_4-\ldots,$$

$$p'''_2=-p'''_3-p'''_4-p'''_5-\ldots$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

zur Geltung kommen, während die $(m-1)(n-1)$ zurückbleibenden überhaupt selbstständig sind. Nehmen wir hingegen an, dass n durch m theilbar und zugleich λ Null ist, so finden zwischen diesen zurückgebliebenen Perioden folgende $m-1$ Gleichungen statt:

$$p'_1+p''_2+p'''_3+\ldots+p^{(n-1)}_{m-1}=0,$$
$$p'_2+p''_3+p'''_4+\ldots+p^{(n-1)}_{m}=0,$$
$$p'_3+p''_4+p'''_5+\ldots+p^{(n-1)}_{1}=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p'_{m-1}+p''_m+p'''_1+\ldots+p^{(n-1)}_{m-3}=0,$$

woraus folgt:

$$p'_1=-p''_2-p'''_3-\ldots-p^{(n-1)}_{m-1},$$
$$p'_2=-p''_3-p'''_4-\ldots-p^{(n-1)}_{m},$$
$$p'_3=-p''_4-p'''_5-\ldots-p^{(n-1)}_{1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p'_{m-1}=-p''_m-p'''_1-\ldots-p^{(n-1)}_{m-3},$$

und mithin fallen noch die Perioden p'_1, p'_2, ..., p'_{m-1} fort. Im allgemeinen Falle, wo $(m-1)(n-1)$ die Anzahl der selbstständigen Perioden ist, werden diese also folgendes System bilden:

$$\begin{array}{l}
p'_1,\ p'_2,\ p'_3,\ldots,\ p''_{m-3},\ p''_{m-2},\ p'_{m-1},\\
p''_2,\ p''_3,\ p''_4,\ldots,\ p''_{m-2},\ p''_{m-1},\ p''_m,\\
p'''_1,\ p'''_2,\ p'''_4,\ldots,\ p'''_{m-2},\ p'''_{m-1},\ p'''_m,\\
p^{IV}_1,\ p^{IV}_2,\ p^{IV}_3,\ldots,\ p^{IV}_{m-2},\ p^{IV}_{m-1},\ p^{IV}_m,
\end{array}$$

oder, wenn wir mit ω die Exponentialgrösse $e^{-\frac{2\pi i}{m}}$ bezeichnen:

$$\begin{array}{l}
p'_1,\ \omega p'_1,\ \omega^2 p'_1,\ldots,\ \omega^{m-4}p'_1,\ \omega^{m-3}p'_1,\ \omega^{m-2}p'_1,\\
\omega p''_1,\ \omega^2 p''_1,\ \omega^3 p''_1,\ldots,\ \omega^{m-3}p''_1,\ \omega^{m-2}p''_1,\ \omega^{m-1}p''_1,\\
p'''_1,\ \omega^2 p'''_1,\ \omega^3 p'''_1,\ldots,\ \omega^{m-3}p'''_1,\ \omega^{m-2}p'''_1,\ \omega^{m-1}p'''_1,\\
p^{IV}_1,\ \omega p^{IV}_1,\ \omega^2 p^{IV}_1,\ldots,\ \omega^{m-3}p^{IV}_1,\ \omega^{m-2}p^{IV}_1,\ \omega^{m-1}p^{IV}_1,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

Um nun für den Fall, dass die Zahl n durch m theilbar und zugleich der Coefficient λ Null ist, die $(m-1)(n-2)$ selbstständigen Perioden zu erhalten, brauchen wir nur die erste Horizontalreihe des einen oder andern der beiden vorstehenden Systeme zu streichen, und es bleiben dann folgende Perioden zurück:

$$\begin{array}{l}
\omega p''_1,\ \omega^2 p''_1,\ \omega^3 p''_1,\ldots,\ \omega^{m-3}p''_1,\ \omega^{m-2}p''_1,\ \omega^{m-1}p''_1,\\
p'''_1,\ \omega^2 p'''_1,\ \omega^3 p'''_1,\ldots,\ \omega^{m-3}p'''_1,\ \omega^{m-2}p'''_1,\ \omega^{m-1}p'''_1,
\end{array}$$

p^{IV}_1, ωp^{IV}_1, $\omega^2 p^{IV}_1, \ldots,$ $\omega^{m-3} p^{IV}_1$, $\omega^{m-2} p^{IV}_1$, $\omega^{m-1} p^{IV}_1$,

. . . .

$p_1^{(n-1)}$, $\omega p_1^{(n-1)}$, $\omega^2 p_1^{(n-1)}, \ldots,$ $\omega^{m-4} p_1^{(n-1)}$, $\omega^{m-2} p_1^{(n-1)}$,

$\omega^{m-1} p_1^{(n-1)}$.

60. Zum Schlusse mag noch die Untersuchung der Gleichung dritten Grades:

$$u^3 - u + z = 0$$

Platz finden. Bezeichnen u_1, u_2, u_3 die drei dieser Gleichung genügenden Functionen, deren Anfangswerthe für $z = 0$ bezüglich 0, $+1$ und -1 sind, so werden, wie wir in Nr. 32 gesehen haben, die erste und zweite derselben gleiche Werthe annehmen, sobald der Punkt Z vom Anfangspunkte O aus nach dem $z = +\frac{2}{3\sqrt{3}}$ entsprechenden Punkte A gelangt, und zwar auf dem geradlinigen Wege OA; ferner erhalten die erste und dritte Function gleiche Werthe, wenn der Punkt Z vom Anfangspunkte aus über die gerade Linie OA' bis zu dem $z = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ entsprechenden Punkte A' fortgegangen ist. Ausser den Punkten A und A' gibt es jedoch keinen, welcher vielfachen Wurzeln der gegebenen Gleichung entspräche. Wir wollen nun, was einer frühern Auseinandersetzung zufolge erlaubt ist, die Elementar-Curven (A) und (A') mit den geraden Linien OA, OA' allmälig zur Coincidenz bringen und dann mit v_1, v_2, v_3 die Werthe der Integrale $\int_0^k u_1 dz$, $\int_0^k u_2 dz$, $\int_0^k u_3 dz$ für eine bestimmte Integrations-Curve OMK bezeichnen. Zunächst ist die Frage zu beantworten, welche Werthe das Integral $\int_0^k u_1 dz$ überhaupt annehmen kann, wenn die Bewegung des Punktes Z von C bis K auf Curven jeder Art geschieht.

In Nr. 32 wurde gezeigt, dass die Wurzeln u_1 und u_2 nach einem Umlauf von Z auf der Curve (A) ihre Anfangswerthe austauschen, während gleichzeitig u_3 den eignen Anfangswerth wieder annimmt; demnach erhält auch die Function $u_1 + u_2$ ihren Anfangswerth wieder, so dass die Integrale $\int u_3 dz$ und $\int (u_1 + u_2) dz$, über die Curve $(+A)$ ausgedehnt, keine Veränderung erleiden, wenn nämlich vorausgesetzt wird, dass sich diese Curve auf eine

unendlich kleine geschlossene Curve um den Punkt A reduciren lässt. Da nun die Functionen u_3 und u_1+u_2 in diesem Punkte endliche Werthe behalten, so ist nach Nr. 46:

$$A_3=0\,,\quad A_1+A_2=0\,;$$

und weil die Integrale A_3, A_{-3} aus paarweise gleichen, aber entgegengesetzten Elementen bestehen, eben so auch die beiden Integrale A_1, A_{-2} und desgleichen die Integrale A_2, A_{-1}, so ist ferner:

$$A_3=A_{-3}=0\,,\quad A_1=-A_2=A_{-1}=-A_{-2}.$$

Andererseits gelten die Gleichungen:

$$A'_2=A'_{-2}=0\,,\quad A'_1=-A'_3=A'_{-1}=-A'_{-3}.$$

Da wir demnach das Vorzeichen eines beliebigen Terms der Charakteristik ändern können, ohne eine Veränderung des Werths des gesuchten Integrals dadurch hervorzurufen, so brauchen wir dieses Vorzeichen nicht besonders zu setzen. Beachten wir ferner, dass jede der Functionen u_1, u_2, u_3 nach einem Umlauf von Z auf der Curve $(A)(A)$ ihren Anfangswerth wieder annimmt, und dass die Integrale $\int u_1dz$, $\int u_2dz$, $\int u_3dz$, über diese Curve fortgeführt, den vorstehenden Relationen gemäss gleich Null sind; so ist es erlaubt, falls in der Charakteristik einer von Z zu durchlaufenden Curve die beiden Terme $(A)(A)$ auf einander folgend vorkommen sollten, diese zu unterdrücken. Dieselbe Betrachtung gilt auch für die beiden etwa auf einander folgenden Terme $(A')(A')$, und wir sind daher berechtigt, gleich im Voraus anzunehmen, dass in je zwei auf einander folgenden Termen der Charakteristik der Curve OLK die Buchstaben A und A' beide vorkommen.

So werden die drei ersten Terme eine der beiden folgenden Zusammensetzungen bilden müssen:

$$(A)(A')(A)\,,\quad (A')(A)(A').$$

Was nun zum Beispiel die Function u_1 betrifft, so nimmt dieselbe nach einem Umlauf des Punktes Z auf einer geschlossenen Curve, welche durch eine dieser Zusammensetzungen repräsentirt ist, ihren Anfangswerth wieder an, und andererseits ist das Integral $\int u_1dz$ für diese Curve gleich Null. Es folgt hieraus, dass wir zunächst die drei ersten Terme der Charakteristik der Curve OLK unbe-

schadet des Integrals $\int_0^k u_1 dz$ streichen dürfen; aus denselben Gründen ist dies auch mit den drei folgenden Termen gestattet, u. s. f., so dass schliesslich die Charakteristik auf eine der folgenden Formen zurückgeführt wird:

$$+OMK,\ (A)+OMK,\ (A')+OMK,\ (A)(A')+OMK,\ (A')(A)+OMK,$$

und dann das Integral in Bezug hierauf folgende Werthe erhält:

$$v_1,\ A_1+v_2,\ A'_1+v_3,\ A_1+v_2,\ A'_1+v_3.$$

Weil aber die gegebeue Gleichung dadurch, dass wir u in $-u$ und zugleich z in $-z$ verwandeln, keine Aenderung erleidet, so ergibt sich ohne Weiteres $A'_1 = A_1$, demnach besitzt das in Rede stehende Integral, welche Gestalt übrigens die Curve OLK auch erhalten mag, nur drei wesentlich verschiedene Werthe, die sich folgendermassen darstellen lassen:

$$v_1,\ A_1+v_2,\ A_1+v_3.$$

Da also die Anzahl der Werthe des Integrals $\int_0^k u_1 dz$ eine begrenzte ist, so schwindet für das eben behandelte Beispiel eine Untersuchung der Perioden von selbst.

Ueberhaupt ist das Integral $\int_c^k u dz$ immer nur auf eine begrenzte Anzahl von Werthen beschränkt und deshalb nicht periodisch, sobald die zwischen u und z stattfindende Gleichung die Form

$$f(u) = z$$

hat, worin $f(u)$ ein ganzes Polynom von u bezeichnet, welches nicht unmittelbar von z abhängt. Setzt man nämlich

$$\int_0^z u dz = v,$$

so hat man:

$$dv = u dz = u f'(u) du,$$

mithin:

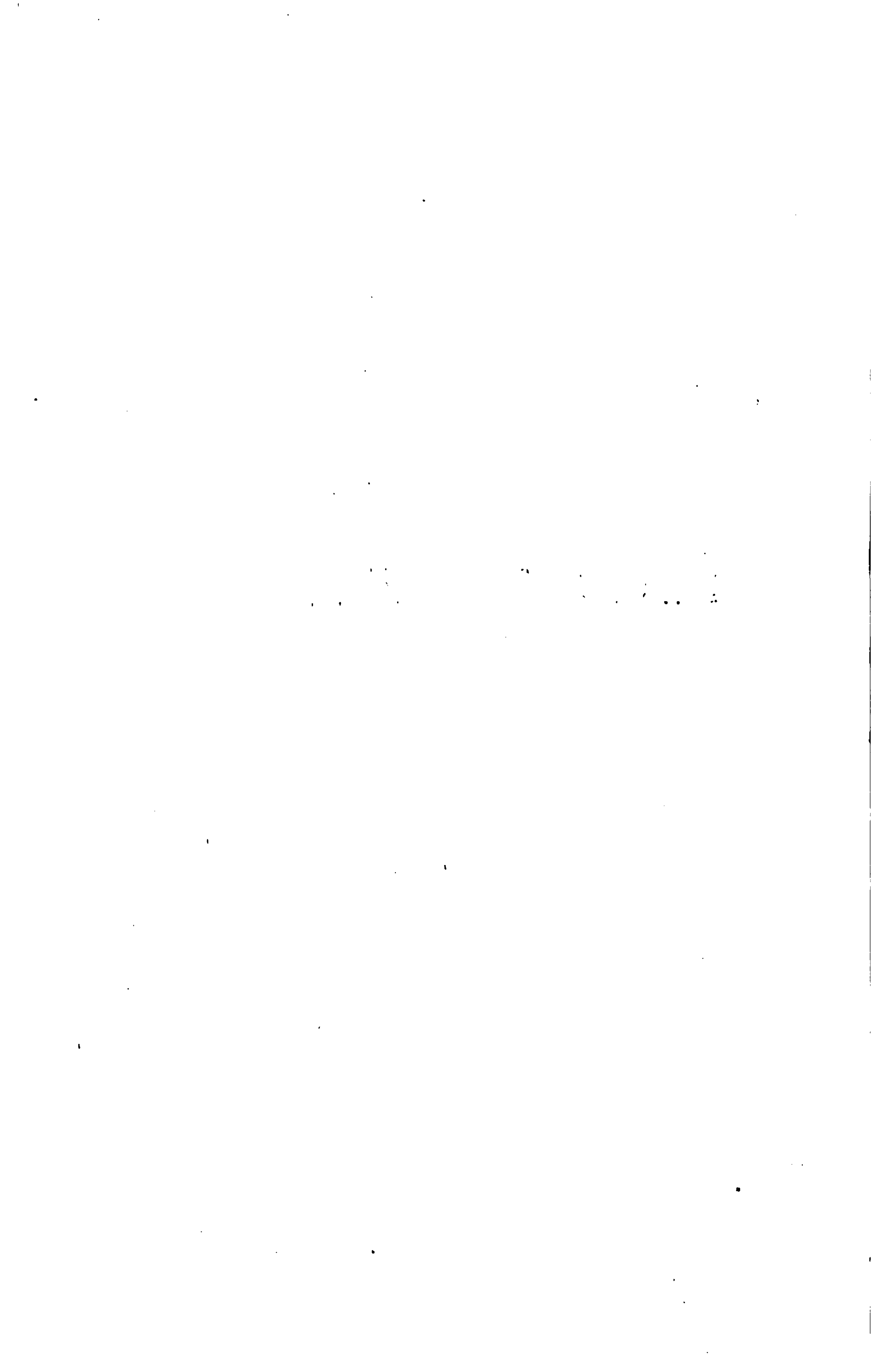
$$v = \int u f'(u) du = F(u),$$

woraus folgt, dass das ganze Polynom $v = F(u)$ für jeden Werth von z eben so viel Werthe besitzt als u, während andererseits die Anzahl der Werthe von u nach Massgabe der algebraischen Gleichung

$$f(u) = z$$

eine begrenzte ist.

Zweite Abhandlung.



I.

Das Integral $\int_c^k u_1 dz$, worin u_1 eine continuirliche Function von z vorstellt, welche der algebraischen Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

genügt, besitzt im Allgemeinen unendlich viele Werthe. Diese Werthe entsprechen, wie Cauchy bewiesen hat, allen möglichen Curven, die der zur Darstellung der Variabeln z dienende bewegliche Punkt Z von C bis K durchlaufen kann, während z von c bis k wächst.

Schon bei der frühern Untersuchung wurde auf dem von Cauchy zuerst betretenen Wege gefunden, dass unendlich viele Werthe des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ nur um beliebige ganze Vielfache gewisser Constanten verschieden sind, und dass jede dieser Constanten, welche den Namen *Perioden* führen, die Form

$$p = \int u_n dz$$

hat, wo u_n eine aus der Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

sich ergebende Function ist, und wo ausserdem das Integral sich über eine geschlossene Curve von der Art erstreckt, dass die Function u_n nach einem Umlauf von Z auf dieser Curve ihren Anfangswerth wieder erhält. Indessen ist es nicht ohne Weiteres klar, 1) dass jede der soeben definirten Grössen p wirklich eine Periode des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ ist, und 2) dass eine solche Periode

allen Werthen des Integrals zukommt. Es soll jetzt gezeigt werden, dass es sich in der That so verhält, wenn die Gleichung

$$f(u_1 z) = 0$$

irreductibel ist*), dass also immer ein Werth des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ entsteht, wenn man beliebige ganze Vielfache von Grössen der Form p zu einem Werthe des Integrals addirt, und hierdurch erhält dann die zweite Frage von Nr. 48 der vorstehenden Abhandlung ihre vollständige Lösung.

Wir gehen von folgendem Satze aus:

„Wenn eine continuirliche algebraische Function von z einwerthig ist, d. h. wenn sie jedesmal denselben Werth erlangt, so oft der bewegliche Punkt Z denselben Ort einnimmt, so muss dieselbe rational sein."

Nehmen wir nämlich an, dass diese Function, die mit v bezeichnet werden mag, folgender Gleichung Genüge leistet:

$$Nv^m + Pv^{m-1} + Qv^{m-2} + \dots + Sv + T = 0,$$

wo N, P,...., T ganze Polynome von z sind, so wird es, wenn wir hierin:

$$Nv = u$$

setzen, für jeden Werth von z ebenfalls nur einen Werth von u geben, welcher dann der Gleichung

$$(1) \quad u^m + Pu^{m-1} + NQu^{m-2} + \dots + N^{m-2}Su + N^{m-1}T = 0$$

genügt, und die Function u wird ausserdem für keinen endlichen Werth von z unendlich gross.

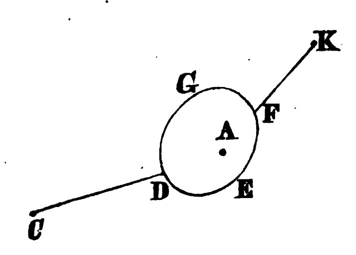
Es ist nun leicht einzusehen, dass das Integral $\int_c^k u_1 dz$ denselben Werth behält, wenn wir die Integrations-Curve CMK zwischen den festen Grenzen C und K verschieben; der Beweis hier-

---

*) Unter *irreductibel* verstehen wir hier, dass die linke Seite der Gleichung durch kein ganzes Polynom von u und z theilbar ist; überdiess mag vorausgesetzt werden, dass auch kein von z allein abhängender ganzer Factor vorkommt.

von wurde in Nr. 9 unter der Voraussetzung geführt, dass sich die Verschiebung der Curve CMK über keinen der Punkte A, A',.... hinaus erstreckt, für welche die Function u mit einer zweiten Wurzel der Gleichung (1) coincidirt. Aber das in Rede stehende Integral bleibt im gegenwärtigen Falle auch dann ungeändert, wenn die Curve CMK durch einen der Punkte A, A'',.... hindurchgeht. Was z. B. die Ueberschreitung des Punktes A betrifft, so sei $DEFG$ (Fig. 26) eine unendlich kleine, denselben umgebende geschlossene Curve, nach welcher die beiden Linien CD und KF geführt sind;

Fig 26.



es wird dann behauptet, dass der Werth des Integrals $\int_c^k udz$, über die Curve $CDEFK$ fortgeführt, dem Werthe für die Ausdehnung $CDGFK$ desselben Integrals gleich ist. Denn jeder von diesen Werthen, und alsdann auch die etwa stattfindende Differenz derselben, ist von dem Umfange der Curve $DEFG$ unabhängig, und zwar reducirt sich diese Differenz, da die Function u für jeden Punkt der Linien CD, FK nur einen Werth besitzt, auf den Werth ε des Integrals $\int udz$, über die Curve $DEFG$ ausgedehnt. Da nun die Function für jeden endlichen Werth von z endlich bleibt, so lässt sich offenbar durch hinlängliche Verengung der Curve $DEFG$ die Norm von ε kleiner machen, als jede gegebene Grösse ist, und weil endlich ε selbst vom Umfange dieser Curve nicht abhängt, so muss geradezu

$$\varepsilon = 0$$

sein, was eben jetzt behauptet wurde.

Lassen wir dann die Punkte C und K zusammenfallen, wodurch die Curve CMK in eine geschlossene übergeht, so ist das Integral $\int udz$ für diese Curve nach Nr. 12 überhaupt von dem Ausgangsorte C des Punktes Z unabhängig. Daraus folgt, dass der Werth desselben keine Aenderung erleidet, man mag die Integra-

tions-Curve irgendwie verschieben, und zwar, da sich diese auf den blossen Punkt reduciren kann, immer Null ist.

Setzen wir jetzt

$$u = \varphi(z)$$

und bezeichnen mit γ den besondern Werth von z, welchem der Punkt Γ entspricht, so theilt die Function

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(\gamma)}{z - \gamma}$$

mit $\varphi(z)$ oder u die Eigenschaft, für jeden Werth von z nur einen Werth zu besitzen und immer endlich zu bleiben. Dasselbe gilt auch noch für $z = \gamma$; denn die Function $\varphi(z)$ nimmt nach einem Umlauf von Z um Γ ihren Werth wieder an, und folglich besteht das auf den Punkt Γ bezügliche cyklische System, welchem diese Function angehört, nur aus einem Term (Nr. 18), mithin lässt sich $\varphi(z)$ nach Nr. 23 für hinreichend kleine Werthe von $z - \gamma$ in eine convergente, nach den ganzen positiven Potenzen von $z - \gamma$ fortschreitende Reihe entwickeln, d. h. es ist:

$$\varphi(z) = \varphi(\gamma) + A(z - \gamma) + B(z - \gamma)^2 + \ldots.,$$

und folglich:

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(\gamma)}{z - \gamma} = A + B(z - \gamma) + \ldots.$$

Wir sehen also, dass die Function

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(\gamma)}{z - \gamma}$$

für $z = \gamma$ den endlichen Werth A behält.

Somit lässt sich auf diese Function das in Bezug auf die Function u Gesagte anwenden, und auch das Integral

$$\int \frac{\varphi(z) - \varphi(\gamma)}{z - \gamma} dz,$$

über eine beliebige geschlossene Curve ausgedehnt, ist gleich Null. Hieraus folgt alsdann die Gleichung:

$$\varphi(\gamma) \int \frac{dz}{z - \gamma} = \int \frac{\varphi(z) dz}{z - \gamma},$$

wo sich die auf beiden Seiten vorkommenden Integrationen über

irgend eine und dieselbe geschlossene Curve erstrecken. Der Werth des Integrals $\int \frac{dz}{z-\gamma}$ ergibt sich leicht, wenn wir annehmen, dass diese Curve überall vom Anfangspunkte geringere Entfernungen hat, als die Norm von γ ist, was stets erlaubt ist, und wir finden für denselben $2\pi i$. Da andererseits die convergente Reihe

$$\frac{1}{z-\gamma} = \frac{1}{z} + \frac{\gamma}{z^2} + \frac{\gamma^2}{z^3} + \ldots\ldots$$

stattfindet, so können wir die vorstehende Gleichung auch folgendermassen schreiben:

$$2\pi i \,.\, \varphi(\gamma) = \int \frac{\varphi(z)\,dz}{z} + \gamma \int \frac{\varphi(z)\,dz}{z^2} + \gamma^2 \int \frac{\varphi(z)\,dz}{z^3} + \ldots\ldots,$$

wo nun die rechterhand vorkommenden Integrationen über eine beliebige geschlossene Curve fortgeführt werden können, wofern nur diese den Anfangspunkt der Coordinaten einschliesst, etwa über einen um den Anfangspunkt beschriebenen Kreis.

Wenn wir jetzt die Gleichung (I) durch Division mit $(z^\mu)^m$ in folgende Form bringen:

$$\left(\frac{u}{z^\mu}\right)^m + \frac{\mathrm{P}}{z^\mu}\left(\frac{u}{z^\mu}\right)^{m-1} + \frac{\mathrm{NQ}}{z^{2\mu}}\left(\frac{u}{z^\mu}\right)^{m-2} + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{\mathrm{N}^{m-2}\mathrm{S}}{z^{(m-1)\mu}} \cdot \frac{u}{z^\mu} + \frac{\mathrm{N}^{m-1}\mathrm{T}}{z^{m\mu}} = 0,$$

wo die ganzen Polynome N, P, Q, R,...., S, T in Bezug auf z der Reihe nach die Grade n, p, q, r,...., s, t haben, so ist klar, dass sämmtliche Potenzen von $\frac{u}{z^\mu}$ vom zweiten Term aus mit unendlich anwachsendem z zu Null herabsinken, wenn die ganze Zahl μ einen solchen Werth hat, dass alle Nenner von höherem Grade als die zugehörigen Zähler sind, d. h. wenn μ die grösste der Zahlen

$$p,\ \frac{n+q}{2},\ \frac{2n+r}{3}, \ldots\ldots, \frac{(m-2)n+s}{m-1},\ \frac{(m-1)n+t}{m}$$

übersteigt. Da dann alle m Werthe von $\frac{u}{z^\mu}$ mit unendlich anwachsendem z zu Null herabsinken, so können die m Normen von $\frac{\varphi(z)}{z^\mu}$ durch hinlängliche Vergrösserung der Norm von z beliebig

klein gemacht werden; ist also M die grösste der Normen von $\frac{\varphi(z)}{z^\mu}$ für den Umfang eines um den Anfangspunkt beschriebenen Kreises, so kann dieselbe dadurch zu beliebiger Kleinheit gebracht werden, dass man den Radius des Kreises hinreichend gross nimmt. Nun ist die Norm des Integrals $\int \frac{\varphi(z)}{z^\mu} \cdot \frac{dz}{z}$, über diesen Kreis ausgedehnt, kleiner als die Summe der Normen der Elemente*), d. h. als $\int_0^{2\pi} Md\tau = 2\pi M$, mithin ist auch die Norm des Coefficienten von γ^μ in der Entwickelung von $\varphi(\gamma)$ selbst kleiner als M, und folglich muss dieser Coefficient, der sonst einen bestimmten, vom Radius unabhängigen Werth hat, gleich Null sein. Somit kann die Entwickelung von $\varphi(\gamma)$ keine Potenzen mehr enthalten, deren Exponenten die grösste der Zahlen

$$p, \frac{n+q}{2}, \frac{2n+r}{3}, \ldots\ldots, \frac{(m-1)n+t}{m}$$

übersteigt, und daher nur eine begrenzte Anzahl von Termen umfassen. Wir sehen also, dass $\varphi(\gamma)$ eine ganze Function des Arguments γ, oder u eine ganze Function von z, dass mithin die Function $v = \frac{u}{N}$ in Bezug auf z rational ist, was zu beweisen war.

Wir kehren nun zu der irreductibeln Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

zurück, welcher die m Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ Genüge leisten, und führen auch den Beweis dafür, „dass man immer durch den Punkt C eine geschlossene Curve der Art legen kann, dass von zwei nach Belieben gewählten Functionen jenes Systems, etwa u_1 und u_n, die eine u_1 nach einem Umlauf von Z auf dieser Curve den Anfangswerth der andern u_n erhält."

---

*) Die Norm einer Summe von complexen Grössen ist immer kleiner als die Summe der Normen der Summanden.

Verhielte es sich nämlich anders, so würden die Functionen u_1, $u_2, \ldots, u_m$ in zwei Klassen zerfallen, von denen die eine $\mathfrak{K}$ aus der Wurzel u_1 und solchen Wurzeln besteht, deren Anfangswerthe die Function u_1 überhaupt annehmen kann, während die andere Klasse $\mathfrak{K}'$ diejenigen Wurzeln in sich begreift, deren Anfangswerthe die Function u_1 niemals annehmen kann, und unter welchen sich dann u_n findet; keine der Wurzeln der ersten Klasse würde ihren Anfangswerth mit einer Wurzel der zweiten Klasse vertauschen, auf welcher geschlossenen Curve $(\varDelta)$ man auch den Punkt Z von C aus herumführen mag. Denn wollte man z. B. annehmen, dass die Wurzel u_f der Klasse $\mathfrak{K}$ den Anfangswerth einer Wurzel $u_{f'}$ der Klasse $\mathfrak{K}'$ erhielte, so brauchte man nur eine geschlossene Curve $(\varGamma)$ ausfindig zu machen, auf welcher u_1 den Anfangswerth von u_f erhält, um zu dem, unserer Definition der beiden Klassen widersprechenden Resultate zu gelangen, dass u_1 nach einem Umlauf von Z auf der geschlossenen Curve $(\varGamma)(\varDelta)$ den Anfangswerth von $u_{f'}$ annimmt.

Da also die Wurzeln der Klasse $\mathfrak{K}$ ihre Anfangswerthe nur unter sich vertauschen können, so nimmt immer eine symmetrische Function λ dieser Wurzeln denselben Werth wieder an, auf welcher geschlossenen Curve man auch den beweglichen Punkt Z nach C zurückführen mag, woraus sich nun leicht ergibt, dass λ für jeden Werth von z nur einen Werth besitzt. Es sei nämlich

$$F(\lambda, z) = 0$$

eine algebraische Gleichung, welcher λ genügt, und zwar wollen wir zugleich voraussetzen, dass λ im Punkte C eine einfache Wurzel dieser Gleichung ist (im entgegengesetzten Falle würde ein in unmittelbarer Nähe von C liegender Punkt statt dessen anzunehmen sein). Könnte nun λ in einem Punkte K zwei verschiedene Werthe h und h' besitzen, je nachdem Z die Curve CLK, oder die Curve CMK durchläuft, so würde es unter den Functionen λ, λ', λ'', ..., die der Gleichung

$$F(\lambda, z) = 0$$

genügen, eine andere $\lambda^{(k)}$ geben, welche durch Fortbewegung von Z auf der Curve CMK in K den Werth k annimmt, und alsdann würde λ durch Fortbewegung von Z auf der geschlossenen Curve $CLKMC$ offenbar den Anfangswerth von $\lambda^{(k)}$ in C erhalten, was deswegen nicht möglich ist, weil λ im Punkte C beständig denselben Werth wieder annimmt.

Wenn hiernach die Function λ für jeden beliebigen Punkt K, oder für jeden Werth von z nur einen Werth besitzt, so ist dieselbe, dem oben bewiesenen Satze zufolge, nothwendig in Bezug auf z rational, so dass sich dann auch die Summe aller Wurzeln der Klasse $\mathfrak{K}$, so wie die Summe der Producte von je zwei, je drei, u. s. w. auf eine rationale Weise in Bezug auf z ausdrücken lassen. Diese Wurzeln müssen alsdann einer algebraischen Gleichung von niedrigerem Grade, als die Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

ist, Genüge leisten, was aber der Voraussetzung widerspricht, dass diese irreductibel ist. Somit können wir immer durch den Punkt C eine geschlossene Curve der Art legen, dass u_1 auf derselben den Anfangswerth von u_n erhält.

Mit Hilfe dieser Sätze gelangen wir nun ohne Mühe zur Einsicht der oben ausgesprochenen Behauptung. Es bezeichne nämlich v_1 den Werth des Integrals $\int_c^k u_1 dz$, über eine beliebige Curve CMK ausgedehnt, und p den Werth des Integrals $\int u_n dz$, wo sich die Integration über eine solche geschlossene Curve erstreckt, auf welcher die Function u_n nach einem Umlauf von Z ihren Anfangswerth wieder erhält; diese können wir noch bis zum Punkte C fortschieben, ohne dass der Werth von p, den wir Periode genannt haben, eine Aenderung erleidet. Die Charakteristik der hierdurch eingeführten neuen Curve sei (Φ). Um uns nun davon zu überzeugen, dass durch Addition von p zu v_1 wiederum ein Werth des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ entsteht, brauchen wir nur des Satzes zu ge-

denken, dass man immer durch den Punkt C eine solche geschlossene Curve (Γ) legen kann, auf welcher u_1 nach einem Umlauf von Z den Anfangswerth von u_n erhält, und wo dann u_n den Anfangswerth von u_1 annimmt, wenn die Fortbewegung im entgegengesetzten Sinne, also auf der Curve $(-\Gamma)$ geschieht. Demnach reducirt sich das Integral $\int_c^k u_1 dz$, über die Curve

$$(\Gamma)(\Phi)(-\Gamma)+CMK$$

genommen, weil die auf die Terme (Γ) und $(-\Gamma)$ der Charakteristik bezüglichen Theile desselben gleich und entgegengesetzt sind, auf:

$$p+v_1\,.$$

Eben so hat unser Integral, über die Curve

$$(\Gamma)(-\Phi)(-\Gamma)+CMK$$

ausgedehnt, den Werth:

$$-p+v_1\,.$$

Hieraus ergibt sich endlich, dass man zu einem beliebigen Werthe v_1 des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ eine beliebige Periode p addiren oder subtrahiren kann, mithin eben so auch beliebige ganze Vielfache sämmtlicher Perioden, dass folglich jede Periode allen Werthen des Integrals zukommt, wenn, wie vorausgesetzt wurde, die Gleichung

$$f(u,z)=0$$

irreductibel ist.

II.

Aus der vorstehenden Darlegung geht klar hervor, dass man die zur Vollführung eines Umlaufs von Z dienenden geschlossenen Curven immer so wählen kann, dass die Function u_1 am Ende die Anfangswerthe aller übrigen Functionen erhält, wofern nur die Gleichung

$$f(u,z) = 0,$$

welcher diese Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ von z Genüge leisten, irreductibel ist. Wir können somit geradezu aussprechen, dass eine algebraische Function, welche durch eine irreductible Gleichung $m$ten Grades definirt ist, für jeden Werth von z gerade m Werthe annimmt, wobei aber alle diejenigen isolirten Werthe von z, für welche die Gleichung vielfache Wurzeln besitzt, ausgeschlossen bleiben.

Anders muss es sich freilich verhalten, wenn die Gleichung nicht irreductibel ist. Angenommen, das Polynom $f(u,z)$ zerfiele in zwei polynomische Factoren $\varphi(u\,z)$ und $\psi(u,z)$, welche keinen Factor gemeinschaftlich haben, so würden sich die Functionen u_1, $u_2, \ldots, u_m$ in zwei Klassen sondern, von denen eine aus solchen Functionen besteht, die der Gleichung

$$\varphi(u,z) = 0$$

genügen, während die Functionen der andern Klasse in der Gleichung

$$\psi(u,z) = 0$$

enthalten sind; alsdann würden die Functionen jeder Klasse ihre Werthe nur unter sich vertauschen, mithin könnte jede der Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ nur eine solche Anzahl von Werthen annehmen, die den Grad eines der Polynome $\varphi(u,z)$, $\psi(u,z)$ in Bezug auf u nicht übersteigt, folglich kleiner als m ist.

Auch die Umkehrung dieser Behauptung findet allgemein statt, dass nämlich eine algebraische Function von z, welche m

Werthe für jeden Werth von z besitzt, einer irreductibeln Gleichung vom Grade m genügen muss; weil anderenfalls, wenn diese Function einer irreductibeln Gleichung von höherem oder niedrigerem Grade n zugehörte, dieselbe n Werthe besitzen würde, während diese Anzahl der Voraussetzung gemäss m sein sollte. Für den besondern Fall, dass die Function stets einwerthig ist, haben wir bereits früher den rationalen Charakter derselben erkannt.

Wir wollen jetzt untersuchen, ob eine algebraische Gleichung zwischen zwei Variabeln:

$$f(u,z) = 0,$$

deren reelle oder imaginäre Coefficienten numerisch gegeben sind, irreductibel ist, oder nicht.*)

Zunächst sondern wir diejenigen Werthe von z ab, für welche die gegebene Gleichung vielfache oder unendlich grosse Wurzeln hat; dieselben werden sich nämlich als die Wurzeln einer Gleichung

$$\varphi(z) = 0$$

in begrenzter Anzahl darstellen lassen, etwa die Werthe $a, a', a'', \ldots.$ besitzen und gewissen Punken $A, A', A'', \ldots.$ entsprechen. Bezeichnen wir nun mit c einen willkürlich angenommenen, jedoch von den Grössen $a, a', a'', \ldots.$ verschiedenen Werth von z und mit C den entsprechenden Punkt, so dass also die Gleichung

$$f(u,c) = 0$$

m durchweg ungleiche Wurzeln $b_1, b_2, \ldots. b_m$ liefern wird, welche wir als die verschiedenen Anfangswerthe der m Functionen $u_1, u_2, \ldots., u_m$ einführen wollen; legen wir dann durch den Punkt C geschlossene Curven der Art, dass jede nur einen der Punkte $A, A', A'', \ldots.$ umgibt, während alle übrigen Punkte ausserhalb der-

*) Es bleibt hier der Fall ausgeschlossen, wo diese Gleichung vielfache Wurzeln hat, welche Werthe z auch erhalten mag; nach der bekannten Theorie von den gleichen Wurzeln würde dieselbe in solchem Falle eine Zusammensetzung aus mehrern andern Gleichungen sein.

selben bleiben, und bezeichnen mit (A) die um den Punkt A beschriebene Curve, mit (A') die um den Punkt A' gezogene, u. s. f.: so lässt sich nach den schon früher in Nr. 28—31 angestellten Betrachtungen für jede dieser Elementar-Curven diejenige Function u_f allgemein ermitteln, deren Anfangswerth b_f nach einem Umlauf des Punktes Z einer Function u_f zukommt. Wollte man z. B. untersuchen, welche Functionen es sind, deren Anfangswerthe die Function u_1 überhaupt annehmen kann, so würde sich ergeben, dass zunächst diese die Anfangswerthe einer gewissen Anzahl anderer Functionen u_x, u_p, ..., u_r annimmt, sobald der Punkt Z auf je einer Elementar-Curve herumgeführt ist; dass dann wieder jede der Functionen u_x, u_p, ..., n_r nach den Umläufen von Z auf je einer Elementar-Curve die Anfangswerthe gewisser Functionen erhalten würde, die nun entweder unter den bis jetzt in Betracht gekommenen schon begriffen sind, oder nicht. Im letztern Falle seien $u_{x'}$, $u_{p'}$, ..., $u_{r'}$ die neu hinzutretenden Functionen, deren jede wiederum nach den Umläufen von Z auf je einer Elementar-Curve entweder die Anfangswerthe bereits gefundener Functionen annehmen würde, oder ausserdem die Anfangswerthe von neuen Functionen $u_{x''}$, $u_{p''}$, ..., $u_{r''}$, u. s. f. Schliesslich würde man nach einer gewissen Reihe derartiger Partial-Untersuchungen nothwendig irgend welchen der bisher ermittelten Functionen wieder begegnen müssen, und somit finden, dass u_1, u_x, u_p, ..., u_r, $u_{x'}$, $u_{p'}$, ..., $u_{r'}$, $u_{x''}$, ... alle verschiedenen Functionen sind, deren Anfangswerthe die Function u_1 überhaupt annehmen kann. Nun sind zwei Fälle möglich, 1) dass die Anzahl dieser Functionen gleich m ist, also ihre Gesammtheit geradezu mit der der Functionen u_1, u_2, ..., u_m übereinstimmt: alsdann gibt es m Werthe der Function u_1, und die Gleichung

$$f(u, z)_s = 0$$

ist gewiss irreductibel; 2) dass die Anzahl μ dieser Functionen kleiner als m ist: alsdann ergeben sich nur μ Werthe der Function u_1, und diese gehört einer irreductibeln Gleichung μten Gra-

des an, d. h. die gegebene Gleichung ist in diesem Falle nicht irreductibel.

Die μ Functionen, deren Anfangswerthe die Function u_1 annimmt, welche hier mit u_1, u_2,...., u_μ bezeichnet werden mögen, vertauschen nämlich ihre Werthe nur unter sich; ferner wird es eine gewisse Anzahl ν unter den übrig bleibenden Wurzeln der Gleichung

$$f(u,z)=0$$

geben, deren Anfangswerthe eine nach Belieben gewählte Function unter diesen annimmt, welche wir mit $u_{\mu+1}$, $u_{\mu+2}$,...., $u_{\mu+\nu}$ bezeichnen wollen. Sollten noch überdiess Wurzeln zurückbleiben, so würden wir auf ähnliche Weise zu einer neuen Klasse von ϱ Functionen gelangen, die ebenfalls ihre Werthe nur unter sich vertauschen, u. s. f., bis die ganze Reihe der Functionen u_1, u_2,...., u_m erschöpft ist. Hiermit sind dann aus der gegebenen Gleichung

$$f(u,z)=0$$

so viel irreductible Gleichungen gewonnen, als Klassen gebildet wurden, und zwar geben die Zahlen μ, ν, ϱ die Grade derselben an.

Wir haben also ein Verfahren erzielt, mittelst dessen sich sowol erkennen lässt, ob eine Gleichung zwischen zwei Variabeln irreductibel ist, als auch, wenn diese Eigenschaft nicht vorgefunden wird, die Grade der abgesonderten irreductibeln Gleichungen ergeben. Auch können leicht diejenigen ganzen Functionen von z aufgestellt werden, welche den verschiedenen Potenzen von u in diesen Gleichungen als Coefficienten dienen; wir wollen indessen hierauf nicht näher eingehen.

Es verdient bemerkt zu werden, dass die Kenntniss der genauen Werthe der Wurzeln a, a', a'',.... der Gleichung

$$\varphi(z)=0$$

für die Anwendung keineswegs erforderlich ist, vielmehr genügt es, nur um jeden der entsprechenden Punkte A, A', A'',.... eine Curve zu beschreiben, die alle übrigen Punkte ausschliesst; diese

Trennung lässt sich aber mit Hilfe des schönen Satzes von Cauchy über die Anzahl der von einer Curve eingeschlossenen imaginären Wurzeln immer bewerkstelligen. *)

Beispielsweise betrachten wir folgende Gleichung:

$$u^3 - u + z = 0,$$

welche beiläufig in die Gleichung für die Dreitheilung des Winkels

*) Der Satz kann leicht folgendermassen hergeleitet werden. Wenn $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ die m Wurzeln der Gleichung

$$\varphi(z) = 0$$

bezeichnen, welchen die Punkte $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ entsprechen, so lässt sich diese in der Form:

$$\varphi(z) \equiv c(z - \gamma_1)^p (z - \gamma_2)^q \ldots (z - \gamma_m)^s = 0$$

darstellen, woraus wir direct erhalten:

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{p}{z - \gamma_1} + \frac{q}{z - \gamma_2} + \ldots + \frac{s}{z - \gamma_m},$$

und alsdann den Werth des Integrals

$$\int \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} dz$$

für eine gewisse geschlossene Grenzcurve ohne Doppelpunkte, auf der wir den z entsprechenden Punkt Z um die etwa eingeschlossenen Punkte Γ herumführen, in der Gestalt:

$$(p + q + \ldots + s)\, 2\pi i.$$

Gleichzeitig durchläuft der $u = \varphi(z)$ zugehörige Punkt U eine andere geschlossene Curve, über welche das Integral

$$\int \frac{du}{u}$$

ausgedehnt den Werth $2n\pi i$ erhält, wo n die Anzahl der Umläufe um den Anfangspunkt der Coordinaten bedeutet; folglich ist:

$$p + q + \ldots + s = n,$$

d. h. die Anzahl der vielfachen und einfachen Wurzeln der Gleichung $\varphi(z) = 0$, welche innerhalb einer Grenzcurve von Z liegen, ist gleich der Anzahl der Umläufe des Punktes U um den Anfangspunkt der Coordinaten, während der Punkt Z die geschlossene Grenzcurve durchläuft.

übergeht, wenn man darin z durch $-\frac{2x}{3\sqrt{3}}$ und u durch $\frac{2y}{\sqrt{3}}$ ersetzt. Die beiden Werthe von z; für welche dieselbe gleiche Wurzeln liefert, sind:

$$z = +\frac{2}{3\sqrt{3}},\ z = -\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Bezeichnen wir mit A, A' die beiden ihnen entsprechenden Punkte und mit u_1, u_2, u_3, die drei der gegebenen Gleichung genügenden Functionen, deren Anfangswerthe für $z = 0$ bezüglich 0, $+1$ und -1 sind, so finden wir nach Nr. 32 ohne Mühe, dass die Function u_1 nach einem Umlauf von Z auf der Curve (A) den Anfangswerth von u_2 und nach einem Umlauf von Z auf der Curve (A') den Anfangswerth von u_3 erhält, mithin drei Werthe annimmt, und dass folglich die Gleichung

$$u^3 - u + z = 0$$

irreductibel ist, was sich übrigens sofort ergibt, wenn man hierin z als eine Function von u betrachtet.

Berichtigungen.

Statt Cauchy's *Exercices d'Analyse et de physique mathématique* sind irrthümlich dessen *Nouveaux Exercices* angegeben worden.

S. 25, Z. 5 v. o. ist statt: diesem zu lesen: diesen.

S. 57, Z. 3 v. u. - - Functionen - - Function.

S. 84, Z. 10 v. o. - - $\int_0^k v_1 dz$ - - $\int_c^k u_1 dz$.

S. 111, Z. 1 v. o. - zu lesen: nicht zu einem einzigen.

S 112, Z. 14 v. o. - statt: 1835 zu lesen: 1834.

